

2021 年物理奧林匹亞國家代表隊
國際賽前集訓營綜合考試(三)參考解答

本試題共有五大題，每一題 20 分，合計 100 分。

一、參考解答：

(a) 燈絲的電阻 $R = \frac{V_{rms}^2}{P} = \frac{110^2}{60} = 202 \Omega$ 。

(b) 燈 絲 的 電 阻 率

$$\rho = \frac{RA}{L} = \frac{R \times \frac{1}{4} \pi D^2}{L} = \frac{202 \times 0.25 \times \pi \times (30 \times 10^{-6})^2}{0.22} = 6.5 \times 10^{-7} \Omega \cdot m$$

利用電阻的溫度關係式 $\rho = \rho_0(1 + \alpha \Delta T)$ ，得

$$\Delta T = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0 \alpha} = \frac{6.5 \times 10^{-7} - 5.3 \times 10^{-8}}{5.3 \times 10^{-8} \times 4.5 \times 10^{-3}} = 2500^\circ C$$

$$T - 20^\circ C = 2500^\circ C \Rightarrow T = 2800K$$

(c) 每單位時間內燈絲所獲的淨熱量，等於電源供應的熱能減去因熱輻射而損失的能量，即

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{(V_p \cos \omega t)^2}{R} - e\sigma(T^4 - T_s^4)S \quad (1)$$

式中 $V_p = \sqrt{2}V_{rms}$ 為交流電壓的振幅， T_s 為周圍環境的溫度（即室溫）， S 為燈絲的表面積。由於 $T \gg T_s$ ，上式可寫為

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{(\sqrt{2}V_{rms})^2}{R} \cos^2 \omega t - e\sigma T^4 S \quad (2)$$

此淨熱量的流入，使燈絲的溫度升高，故

$$\frac{dQ}{dt} = C \frac{dT}{dt} \quad (3)$$

得
$$C \frac{dT}{dt} = \frac{(\sqrt{2}V_{rms})^2}{R} \cos^2 \omega t - e\sigma T^4 S \quad (4)$$

(d) 題設燈絲的溫度變化甚小，由(b)小題的計算知燈絲的平均溫度為 $T_0 = 2800K$ ，故(4)式可近似為

$$C \frac{dT}{dt} \approx \frac{(\sqrt{2}V_{rms})^2}{R} \cos^2 \omega t - e\sigma T_0^4 S \quad (5)$$

由於 T 值在 T_0 的上下起伏，取上式等號兩邊的平均值，可得

$$0 \approx \frac{(\sqrt{2}V_{rms})^2}{R} \cos^2 \omega t - e\sigma T_0^4 S \quad \Rightarrow \quad \frac{V_{rms}^2}{R} = e\sigma T_0^4 S \quad (6)$$

將(6)式代入(5)式，得

$$C \frac{dT}{dt} \approx \frac{(\sqrt{2}V_{rms})^2}{R} \cos^2 \omega t - \frac{V_{rms}^2}{R}$$

$$\Rightarrow C \frac{dT}{dt} \approx \frac{V_{rms}^2}{R} \cos 2\omega t$$

將上式積分，得

$$T = T_0 + \frac{V_{rms}^2}{2RC\omega} \sin 2\omega t$$

式中

$$C = m_w s_w = \left(\rho_w \times \frac{1}{4} \pi D^2 \times L \right) s_w$$

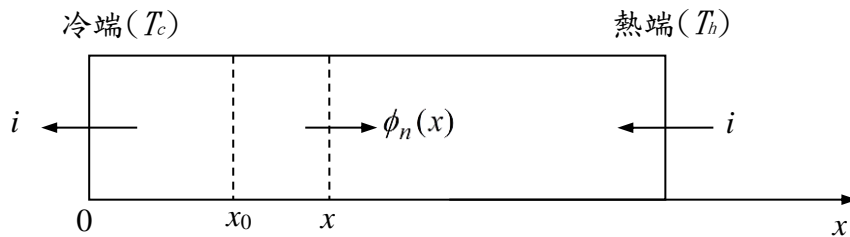
$$= \left(19.3 \times 10^3 \times \frac{1}{4} \pi \times (30 \times 10^{-6})^2 \times 0.22 \right) \times 133 = 4.0 \times 10^{-4} JK^{-1}$$

燈絲溫度變化的幅度為

$$|T - T_0|_{\max} = \frac{V_{rms}^2}{2RC\omega} = \frac{V_{rms}^2}{2RC \times 2\pi f} = \frac{110^2}{2 \times 202 \times 4.0 \times 10^{-4} \times 2\pi \times 60} = 200K$$

(a) 二、參考解答：

先考慮同時有熱流和電流的 N 型半導體晶粒，如下圖所示，



在截面 x 處，沿 x 方向傳導的熱流為 $\phi_n(x) = -k_n A \frac{dT}{dx}$ 。

N-型半導體晶粒的電阻為 $R_n = \frac{L}{\sigma_n A}$ 。

在 x_0 和 x 之間的區塊，電流 i 產生的焦耳熱為 $\left(\frac{x-x_0}{L} \right) i^2 R_n$ 。在穩定狀態時，就每單位時間而言，

$$(\text{流出的熱能}) - (\text{流入的熱能}) = (\text{本身所產生的熱能})$$

即

$$\phi_n(x) - \phi_n(x_0) = \left(\frac{x - x_0}{L} \right) i^2 R_n$$

$$-k_n A \frac{dT}{dx} = \phi_n(x_0) + \left(\frac{i^2 R_n}{L} \right) (x - x_0) \quad (1)$$

將上式對 x 積分，可得

$$-k_n A [T(x) - T(x_0)] = \phi_n(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{i^2 R_n}{L} \right) (x - x_0)^2$$

若取 $x_0 = 0$ ， $x = L$ ，則

$$-k_n A [T(L) - T(0)] = \phi_n(0)L + \frac{1}{2} \left(\frac{i^2 R_n}{L} \right) L^2 \quad (2)$$

將邊界條件： $T(L) = T_h$ 和 $T(0) = T_c$ ，代入(2)式，可得

$$\phi_n(0) = -k_n \frac{A}{L} (T_h - T_c) - \frac{1}{2} i^2 R_n \quad (3)$$

由於銅片及接合面的電阻可忽略，因此不需考慮二者的焦耳熱損失，且銅片處於均勻的溫度 T_c ，不會有熱流自一半導體晶粒傳導至另一晶粒。因此進入 N 型半導體冷端的熱流，應是來自周圍，或是經由晶粒本身。前者以 $\dot{q}_n(0)$ 表示之，後者就是 $-\phi_n(0)$ 。在穩定狀態時，設電流為 i ，則進入冷端的淨熱流，應等於接合面的熱吸收率，也就是 Peltier 熱：

$$\dot{q}_n(0) - \phi_n(0) = (\alpha_{Cu} - \alpha_n) T_c i \quad (\text{在冷端}) \quad (4)$$

式中 α_{Cu} 和 α_n 分別為銅片和 N 型半導體晶粒的 Seebeck 係數。

同理，對 P 型晶粒的分析，可得

$$R_p = \frac{L}{\sigma_p A}$$

$$\phi_p(0) = -k_p \frac{A}{L} (T_h - T_c) - \frac{1}{2} i^2 R_p \quad (5)$$

$$\dot{q}_p(0) - \phi_p(0) = (\alpha_p - \alpha_{Cu}) T_c i \quad (\text{在冷端}) \quad (6)$$

因此冷端的總吸熱率為

$$\dot{q}_c = \dot{q}_p(0) + \dot{q}_n(0)$$

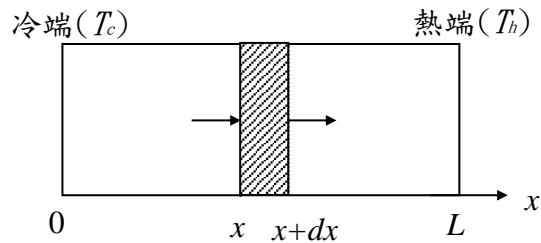
代入(3)，(4)，(5)和(6)式，可得：

$$\begin{aligned} \dot{q}_c &= (\alpha_p - \alpha_{Cu}) T_c i + \phi_p(0) + (\alpha_{Cu} - \alpha_n) T_c i + \phi_n(0) \\ &= (\alpha_p - \alpha_n) T_c i - (k_p + k_n) \frac{A}{L} (T_h - T_c) - \frac{1}{2} i^2 (R_p + R_n) \end{aligned} \quad (7)$$

可知 $a = (k_p + k_n) \frac{A}{L}$, $b = \frac{1}{2}(R_p + R_n) = \frac{L}{2A} \left(\frac{1}{\sigma_p} + \frac{1}{\sigma_n} \right)$

【另解】：

考慮半導體晶粒，取厚度為 dx 的一小段，如下圖所示：



在穩定狀態時，每單位時間內

(傳導出的熱流) - (傳導入的熱流) = (內部產生的熱能)

$$\begin{aligned} & \left(-kA \frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} - \left(-kA \frac{dT}{dx} \right)_x = i^2 R \frac{dx}{L} \\ \Rightarrow & -kA \frac{d^2 T}{dx^2} dx = i^2 R \frac{dx}{L} \\ \Rightarrow & -kA \frac{d^2 T}{dx^2} = i^2 \frac{R}{L} \end{aligned} \quad (8)$$

將上式對 x 積分，並代入冷端 ($x=0$) 處的邊界條件： $-kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = \dot{q}_c$ 和 $T|_{x=0} = T_c$ ，

可得

$$-kA \frac{dT}{dx} - \dot{q}_c = i^2 \frac{R}{L} x \quad (9)$$

$$\Rightarrow -kA(T - T_c) - \dot{q}_c x = i^2 \frac{R}{2L} x^2 \quad (10)$$

在(9)和(10)兩式中，代入熱端 ($x=L$) 處的邊界條件： $-kA \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = \dot{q}_h$ 和 $T = T_h$ ，

可得

$$\dot{q}_h - \dot{q}_c = i^2 R \quad (11)$$

$$-kA(T_h - T_c) - \dot{q}_c L = i^2 \frac{R}{2} L \quad (12)$$

由(12)式可得

$$\dot{q}_c = -k \frac{A}{L} (T_h - T_c) - \frac{1}{2} i^2 R \quad (13)$$

試題圖 1 所示的模組，N 型和 P 型半導體晶粒的組合，對電阻而言為串聯，對熱導而言為並聯，因此(13)式可寫為

$$\dot{q}_c = -(k_p + k_n) \frac{A}{L} (T_h - T_c) - \frac{1}{2} i^2 (R_p + R_n) \quad (14)$$

加上帕帖耳熱的效應，上式可寫為：

$$\dot{q}_c = (\alpha_p - \alpha_n) T_c i - (k_p + k_n) \frac{A}{L} (T_h - T_c) - \frac{1}{2} i^2 (R_p + R_n) \quad (15)$$

(15)式和(7)式的結果完全相同。

(b)

在冷端的吸熱率為

$$\dot{q}_c = \beta T_c i - a(T_h - T_c) - bi^2 \quad (16)$$

式中 $\beta = (\alpha_p - \alpha_n)$ 。將含電流 i 的項配方，並將其移到等號左邊，得

$$\dot{q}_c + b \left(i - \frac{\beta T_c}{2b} \right)^2 = \frac{\beta^2 T_c^2}{4b} + aT_c - aT_h \quad (17)$$

(17)式等號的右邊，對 T_c 而言，為一單調增加的函數。當等號左邊為極小值時， T_c 為最低。由於冷凍機冷端的抽熱率 $\dot{q}_c \geq 0$ ，可知當 $\dot{q}_c = 0$ 且 $i = \frac{\beta T_c}{2b}$ 時，(17)式左邊為極小值，也就是零。因此當 T_c 為最低值時，得

$$\frac{\beta^2 T_c^2}{4b} + aT_c - aT_h = 0 \quad (18)$$

若 T_h 為定值，則(18)式的正根即為最低的 T_c 值，即

$$T_{c,\min} = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4(\beta^2/4b)(aT_h)}}{2(\beta^2/4b)} = \frac{2ab}{\beta^2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\beta^2}{ab} \right) T_h} - 1 \right) \quad (19)$$

代入題設的數據，可得

$$\frac{\beta^2}{2ab} = \frac{(\alpha_p - \alpha_n)^2}{2ab} = \frac{(4.0 \times 10^{-4})^2}{2 \times 1.5 \times 10^{-2} \times 2.0 \times 10^{-3}} = 2.67 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

當 $T_h = 300 \text{ K}$ 時， T_c 的最低值為

$$T_{c,\min} = (\sqrt{1 + 2 \times 2.67 \times 10^{-3} \times 300} - 1) / (2.67 \times 10^{-3}) = 2.3 \times 10^2 \text{ K}$$

【另解】：

由(16)式可得

$$T_c = \frac{aT_h + bi^2 + \dot{q}_c}{\beta i + a} \quad (20)$$

欲使 T_c 最低，則 \dot{q}_c 必須為零，同時 T_c 對電流 i 必須為極小，也就是 $\frac{dT_c}{di} = 0$ ，即

$$\beta bi^2 + 2abi - \beta aT_h = 0$$

解得

$$i = \frac{a}{\beta} \left(\sqrt{1 + \frac{T_h \beta^2}{ab}} - 1 \right) \quad (21)$$

將(21)式代入(20)式，並令 $\dot{q}_c = 0$ ，可得最低的冷端溫度 $T_{c,\min}$ 為

$$T_{c,\min} = \frac{2T_h - \frac{2ab}{\beta^2} \left(\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{ab} T_h} - 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{ab} T_h}} = \frac{2ab}{\beta^2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\beta^2}{ab} \right) T_h} - 1 \right) = \frac{2b}{\beta} i \quad (22)$$

(22)式和(19)式完全相同。

(c) 冷端的溫度 $T_c = T_d - R_H \dot{q}_c$ ，式中 T_d 為二極體的運作溫度； R_H 為二極體與冷端的接觸熱阻。將題設的數據代入計算，得

$$T_c = 25 - 2.5 \times 2.0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$$

由試題的圖 2b，可知 N 對模組的抽熱率為單一對模組的 N 倍，故

$$\dot{q}_c = N \left[(\alpha_p - \alpha_n) T_c i - a(T_h - T_c) - bi^2 \right] \quad (23)$$

將已知數據 $\dot{q}_c = 2.0 \text{ W}$ ， $N = 30$ ， $T_c = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$ ，和 $T_h = 70^\circ\text{C} = 343 \text{ K}$ ，代入上式，得

$$15i^2 - 117i + 167 = 0$$

$$i = \frac{117 \pm \sqrt{117^2 - 4 \times 15 \times 167}}{2 \times 15} \approx \frac{117 \pm 61}{30} \approx 1.9 \text{ A 或 } 5.9 \text{ A}$$

取較小的電流，以減少致冷器熱端排出的熱，得 $i = 1.9 \text{ A}$ 。

(d) 冷凍機的性能係數(COP)為

$$COP = \frac{\dot{q}_c}{\dot{W}} = \frac{\dot{q}_c}{\dot{q}_h - \dot{q}_c} \quad (24)$$

熱端的放熱率為

$$\dot{q}_h = N [(\alpha_p - \alpha_n)T_h i - a(T_h - T_c) + bi^2] \quad (25)$$

將(23)和(25)式，代入(24)式，得

$$COP = \frac{\dot{q}_c}{N[(\alpha_p - \alpha_n)(T_h - T_c)i + 2bi^2]}$$

代入數值，可得

$$COP = \frac{2.0}{30 \times [4.0 \times 10^{-4} \times (70 - 20) \times 1.8 + 2 \times 1.5 \times 10^{-2} \times 1.8^2]} = 0.5$$

三、參考解答：

(1) 粒子在溶液中移動 N 步後的淨位移為

$$\bar{R}_N = \bar{L}_1 + \bar{L}_2 + \cdots + \bar{L}_N = \sum_i \bar{L}_i$$

$$\Rightarrow \bar{R}_N \cdot \bar{R}_N = \left(\sum_i \bar{L}_i \right) \cdot \left(\sum_j \bar{L}_j \right) = \sum_{i=1}^N |\bar{L}_i|^2 + \sum_{i \neq j} \sum_j \bar{L}_i \cdot \bar{L}_j$$

$$\Rightarrow |\bar{R}_N|^2 = NL^2 + \sum_{i \neq j} \sum_j \bar{L}_i \cdot \bar{L}_j$$

$$\Rightarrow \langle |\bar{R}_N|^2 \rangle = NL^2 + \sum_{i \neq j} \sum_j \langle \bar{L}_i \cdot \bar{L}_j \rangle = NL^2 \quad (1)$$

上式中由於 \bar{L}_i 和 \bar{L}_j 的方向為任意，且彼此不相關，故 $\sum_{i \neq j} \sum_j \langle \bar{L}_i \cdot \bar{L}_j \rangle = 0$ 。

(2) (a) 粒子在溶液中沿 x -方向的運動方程式為

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -(6\pi\eta a) \frac{dx}{dt} + F_x \quad (2)$$

上式中等號右邊第一項為粒子所受的黏滯力，第二項為周圍的溶液分子作用於粒子的合力 \bar{F} ，在 x -方向上的分力。

(b) 將(2)式等號兩邊乘以 x ，得

$$\begin{aligned} mx \frac{d\dot{x}}{dt} &= -(6\pi\eta a)x \frac{dx}{dt} + xF_x \\ \Rightarrow m \frac{d}{dt}(x\dot{x}) - m\dot{x}^2 &= -(6\pi\eta a)x\dot{x} + xF_x \end{aligned}$$

對上式取平均值，得

$$\langle m \frac{d}{dt}(x\dot{x}) \rangle - \langle m\dot{x}^2 \rangle = -(6\pi\eta a) \langle x\dot{x} \rangle + \langle xF_x \rangle \quad (3)$$

根據能量均分原理， $\langle \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \rangle = \frac{1}{2} kT$ ，又由於 x 和 F_x 的方向皆為任意，且彼此不

相關，故 $\langle xF_x \rangle = 0$ ，將這兩項代入(3)式，可得

$$\langle m \frac{d}{dt}(x\dot{x}) \rangle - kT = -(6\pi\eta a) \langle x\dot{x} \rangle \quad (4)$$

設 $u \equiv \langle x\dot{x} \rangle$ ，則(4)式可寫為

$$m \frac{du}{dt} = -6\pi\eta a \left(u - \frac{kT}{6\pi\eta a} \right) \quad (5)$$

將(5)式積分，得

$$\begin{aligned} \int_0^u \frac{du}{u - (kT/6\pi\eta a)} &= - \left(\frac{6\pi\eta a}{m} \right) \int_0^t dt \\ u &= \frac{kT}{6\pi\eta a} \left(1 - e^{-(6\pi\eta a/m)t} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

設 $\gamma \equiv 6\pi\eta a$ ，則(6)式可寫為

$$\langle x\dot{x} \rangle = \frac{kT}{\gamma} \left(1 - e^{-(\gamma/m)t} \right) \quad (7)$$

$$\Rightarrow \langle x \frac{dx}{dt} \rangle = \frac{kT}{\gamma} \left(1 - e^{-(\gamma/m)t} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{2kT}{\gamma} \left(1 - e^{-(\gamma/m)t} \right) \quad (8)$$

將(8)式積分，得

$$\int_0^{x^2} d \langle x^2 \rangle = \frac{2kT}{\gamma} \int_0^t \left(1 - e^{-(\gamma/m)t} \right) dt$$

$$\Rightarrow \langle x^2 \rangle = \frac{2kT}{\gamma} \left[t - \frac{m}{\gamma} (1 - e^{-(\gamma/m)t}) \right] \quad (9)$$

若 $t \gg \frac{m}{\gamma} = \frac{m}{6\pi\eta a}$ ，則

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{3} \left(\frac{kT}{\pi\eta a} \right) t \quad (10)$$

(3)(a) 將題設的實驗數據分類並計算如下表：

x (μm)	f (次)	x^2 (μm) ²	$x^2 f$ (μm) ²
± 0.25	111	0.0625	6.94
1.0	87	1.0	87.0
-1.0	95	1.0	95.0
2.0	47	4.0	188
-2.0	32	4.0	128
3.0	8	9.0	72.0
-3.0	15	9.0	135
4.0	5	16.0	80.0
-4.0	2	16.0	32.0
5.0	0	25.0	0
-5.0	1	25.0	25.0

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\sum x^2 f}{\sum f} = 2.1(\mu\text{m})^2$$

$$2.1 \times 10^{-12} = \left(\frac{k \times 300}{3\pi \times 1.0 \times 10^{-3} \times 0.40 \times 10^{-6}} \right) \times 2.0$$

$$\Rightarrow k = 1.3 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

(b) 已知氣體常數 $R = 8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ ，得

$$\text{亞弗加厥常數 } N_0 = \frac{R}{k} = \frac{8.31}{1.3 \times 10^{-23}} = 6.3 \times 10^{23}$$

四、參考解答：

(1) 由理想氣體動力論，可得

$$PV = \frac{1}{3} Nm \langle v^2 \rangle \quad (1)$$

式中 N 為氣體分子的總數， m 為一個氣體分子的質量， v 為氣體分子的速率。(1) 式同樣適用於光子氣體，但光子的動態質量不盡相同，光子速率則皆等於 c ，因此可改寫為

$$PV = \frac{1}{3} \sum_i N_i m_i \langle c^2 \rangle = \frac{1}{3} \sum_i N_i \left(\frac{E_i}{c^2} \right) c^2 = \frac{1}{3} \sum_i N_i E_i = \frac{1}{3} U \quad (2)$$

式中 N_i 為具有動態質量 m_i 或能量 $E_i = m_i c^2$ 的光子數。已知光子氣體的總能量

$U = aVT^4$ ，故

$$P = \frac{1}{3} aT^4 \quad (3)$$

比較 $P = bT^4$ ，得 $b = \frac{1}{3} a$ 。

(2) 若體積保持一定，當溫度增加 ΔT 時，總能量的變化為

$$U(T + \Delta T) - U(T) = aV[(T + \Delta T)^4 - T^4] = aVT^4 \left[\left(1 + \frac{\Delta T}{T} \right)^4 - 1 \right] \quad (4)$$

利用二項式展開，可得

$$\Delta U \approx aVT^4 \left[\left(1 + \frac{4\Delta T}{T} \right) - 1 \right] = 4aVT^3 \Delta T \quad (5)$$

由熱力學第一定律 $\Delta U = \Delta Q - P\Delta V$ ，可得光子氣體的定容比熱為

$$C_v = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta T} = 4aVT^3$$

(3) 由(1)的結果知：壓力保持一定時，其溫度不會上升，因此光子氣體的定壓比熱 C_p 等於無限大。

(4) 在絕熱過程中， $\Delta Q = 0$ ，由熱力學第一定律 $\Delta U = \Delta Q - P\Delta V$ 得

$$\begin{aligned} dU &= -PdV \\ \Rightarrow d(aVT^4) &= -\frac{1}{3} aT^4 dV \\ \Rightarrow aT^4 dV + 4aVT^3 dT &= -\frac{1}{3} aT^4 dV \\ \Rightarrow \frac{dV}{V} + 3 \frac{dT}{T} &= 0 \end{aligned}$$

將上式積分，可得

$$\int \frac{dV}{V} + 3 \int \frac{dT}{T} = 0 \Rightarrow \ln V + 3 \ln T = \text{常數} \Rightarrow \ln(VT^3) = \text{常數}$$

$$\Rightarrow VT^3 = \text{常數} \quad (6)$$

(5) 在等溫膨脹過程中，空腔系統對外界所做的功為

$$W = \int_{V_i}^{V_f} P(T) dV = \frac{1}{3} \sigma T^4 (V_f - V_i) \quad (7)$$

(6) 在絕熱膨脹過程中， $\Delta Q = 0$ ，故空腔系統對外界所做的功 W 等於 $-\Delta U$ 。利用(3)式，可得

$$U = aVT^4 = 3 \left(\frac{1}{3} aT^4 \right) V = 3PV \quad (8)$$

$$\Rightarrow W = -(U_f - U_i) = 3(P_i V_i - P_f V_f) \quad (9)$$

(7) 空腔系統在熱力循環各個階段對外界所作的功 W 和所吸收的熱量 Q 如下述：

1→2：等溫過程 ($T_1 = T_2 = T_h$)

$$W_{12} = \frac{1}{3} aT_h^4 (V_2 - V_1)$$

$$\begin{aligned} Q_{12} &= \Delta U + \Delta W = (U_2 - U_1) + W_{12} \\ &= a(V_2 - V_1)T_h^4 + \frac{1}{3} aT_h^4 (V_2 - V_1) \\ &= \frac{4}{3} aT_h^4 (V_2 - V_1) = Q_h \end{aligned}$$

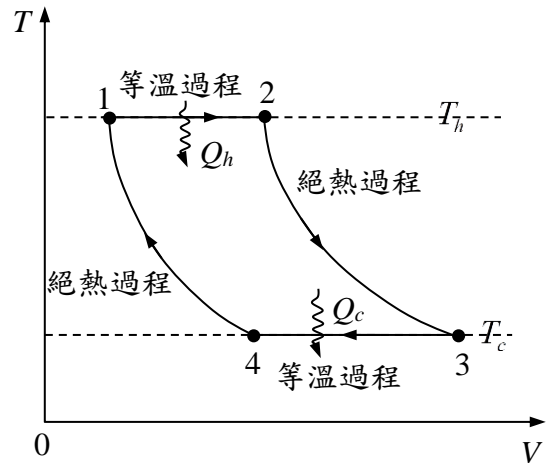
2→3：絕熱過程 ($\Delta Q = 0$)

$$W_{23} = -\Delta U = -(U_3 - U_2) = aV_2 T_h^4 - aV_3 T_c^4$$

$$Q_{23} = 0$$

3→4：等溫過程 ($T_3 = T_4 = T_c$)

$$W_{34} = \frac{1}{3} aT_c^4 (V_4 - V_3)$$



$$\begin{aligned} Q_{34} &= \Delta U + \Delta W = (U_4 - U_3) + W_{34} = a(V_4 - V_3)T_c^4 + \frac{1}{3}aT_c^4(V_4 - V_3) \\ &= -\frac{4}{3}aT_c^4(V_3 - V_4) = -Q_c \end{aligned}$$

4→1：絕熱過程 ($\Delta Q = 0$)

$$\begin{aligned} W_{41} &= -\Delta U = -(U_1 - U_4) = aV_4T_c^4 - aV_1T_h^4 \\ Q_{41} &= 0 \end{aligned}$$

由於 2→3 和 4→1 皆為絕熱過程，利用(6)式，可得

$$V_2T_h^3 = V_3T_c^3 \quad , \quad V_4T_c^3 = V_1T_h^3 \quad (10)$$

故 W_{23} 、 W_{34} 、 W_{41} 、和 Q_{34} 可分別改寫為

$$W_{23} = aV_2T_h^4 - aV_3T_c^4 = aV_2T_h^4 - aV_2T_h^3T_c = aV_2T_h^3(T_h - T_c) \quad (11)$$

$$W_{34} = \frac{1}{3}aT_c^4(V_4 - V_3) = \frac{1}{3}aT_c(T_h^3V_1 - T_h^3V_2) = -\frac{1}{3}aT_cT_h^3(V_2 - V_1) \quad (12)$$

$$W_{41} = aV_4T_c^4 - aV_1T_h^4 = aV_1T_h^3T_c - aV_1T_h^4 = -aV_1T_h^3(T_h - T_c) \quad (13)$$

$$Q_{34} = -Q_c = -\frac{4}{3}aT_c^4(V_3 - V_4) = -\frac{4}{3}aT_cT_h^3(V_2 - V_1) \quad (14)$$

在一整個循環中，空腔系統對外界所做的淨功和所吸收的淨熱量分別為

$$\begin{aligned} W &= W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} \\ &= \frac{1}{3}aT_h^4(V_2 - V_1) + aV_2T_h^3(T_h - T_c) - \frac{1}{3}aT_cT_h^3(V_2 - V_1) - aV_1T_h^3(T_h - T_c) \\ &= \frac{1}{3}aT_h^3(T_h - T_c)(V_2 - V_1) + aT_h^3(T_h - T_c)(V_2 - V_1) \\ &= \frac{4}{3}aT_h^3(T_h - T_c)(V_2 - V_1) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} Q &= Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41} = Q_h - Q_c = \frac{4}{3}aT_h^4(V_2 - V_1) - \frac{4}{3}aT_cT_h^3(V_2 - V_1) \\ &= \frac{4}{3}aT_h^3(T_h - T_c)(V_2 - V_1) \end{aligned} \quad (16)$$

由(15)和(16)兩式可得

$$W = Q_h - Q_c \quad (17)$$

該可逆熱循環的熱效率為

$$\eta = \frac{W}{Q_h} = \frac{Q_h - Q_c}{Q_h} = \frac{\frac{4}{3}aT_h^3(T_h - T_c)(V_2 - V_1)}{\frac{4}{3}aT_h^4(V_2 - V_1)} = 1 - \frac{T_c}{T_h}$$

五、參考解答：

(a) 設 C 板的偏轉角為 ϕ 時，懸線施予 C 板的回復力矩為 τ ，則

$$\tau = I\ddot{\phi} = -\kappa\phi \Rightarrow \ddot{\phi} + \frac{\kappa}{I}\phi = 0 \quad (1)$$

式中 I 為 C 板繞懸線的轉動慣量。因 C 板每單位面積的質量 σ 為

$$\sigma = \frac{M}{2hd + 4(w-d)d} \quad (2)$$

C 板的上下邊繞懸線的轉動慣量為

$$I_1 = 2 \int r^2 dM = 2\sigma d \int_{-(w-d)}^{(w-d)} r^2 dr = \frac{4}{3}\sigma d(w-d)^3$$

C 板的左右邊繞懸線的轉動慣量為

$$I_2 = 2 \int r^2 dM = 2\sigma h \int_{w-d}^w r^2 dr = \frac{2}{3}\sigma h[w^3 - (w-d)^3]$$

C 板矩形框繞懸線的轉動慣量 I 為

$$\begin{aligned} I = I_1 + I_2 &= \frac{4}{3}\sigma d(w-d)^3 + \frac{2}{3}\sigma h[w^3 - (w-d)^3] \\ &= \frac{M}{3(h+2w-2d)} [2w^3 - (h-2d)(3w^2 - 3wd + d^2)] \end{aligned} \quad (3)$$

已知 C 板的扭動週期為 t_0 ，由(1)式的簡諧運動方程式可得

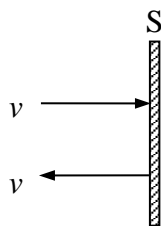
$$t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}} \quad (4)$$

由(3)和(4)兩式得

$$\kappa = \left(\frac{2\pi}{t_0}\right)^2 \cdot \frac{M}{3(h+2w-2d)} [2w^3 - (h-2d)(3w^2 - 3wd + d^2)] \quad (5)$$

(b) 參看下圖，考慮位於此區域內的某一器壁面 S 。設在此面左側的氣體對該面施加的壓力為 P 。對此器壁面而言，每單位時間每單位面積進入與離開的分子個數均為 $nv/6$ ，因此在垂直於該面的方向上，入射和反彈的動量分別為 $(nv/6)mv$ 與 $(nv/6)(-mv)$ ，故此區域內的氣體壓力為

$$P = \frac{nv}{6}mv - \left(-\frac{nv}{6}mv\right) = \frac{1}{3}nmv^2 \quad (6)$$



(c) 當達穩定態時，每單位時間內每單位面積由 A 板往 C 板、以均方根速率 v_A 撞擊 C 板的分子數為 $\frac{1}{3}N_A v_A$ ，必須等於由 C 往 A、以均方根速率 v_C 撞擊 A 板的分子數 $\frac{1}{3}N_C v_C$ ，故

$$N_A v_A = N_C v_C \quad (7)$$

而每單位時間、每單位面積離開此區域之分子數 $G' = \frac{1}{6}(N_A v_A + N_C v_C)$ 。設每一氣體分子之質量為 m ，則比照(2)小題的推導方式，此區域內的氣體總壓力 P' 為

$$P' = \left(\frac{1}{3}N_A v_A\right)(mv_A) - \left(\frac{1}{3}N_C v_C\right)(-mv_C) = \frac{m}{3}(N_A v_A^2 + N_C v_C^2) \quad (8)$$

此即 C 板前表面所承受的氣體壓力。

考慮容器內，冷、熱兩板間區域以外的空間。設此空間內氣體分子的粒子數密度為 N ，因容器與 C 板之溫度相同，故此空間內分子的方均根速度亦為 v_C ，而每單位時間、每單位面積離開此空間進入 A 和 C 兩板間區域的分子數 $G = \frac{1}{6}Nv_C$ 。

當達平衡態時， $G' = G$ ，故得

$$Nv_C = N_C v_C + N_A v_A = 2N_C v_C = 2N_A v_A \quad (9)$$

而此空間內的氣體壓力 P 為

$$P = \frac{m}{3}Nv_C^2 \quad (10)$$

利用上式以及(7)和(9)式，又 $T_A/T_C = (v_A/v_C)^2$ ，可將(8)式改寫為

$$P' = \frac{mN_C v_C^2}{3} \left(1 + \frac{v_A}{v_C}\right) = \frac{P}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{T_A}{T_C}}\right) \quad (11)$$

(d) 因 C 板朝向 A 板之前表面所承受的壓力為 P' ，而背面承受的壓力為 P ，故 C 板在穩定態時，合計其前、後板面，每單位面積受到之作用力 μ 為

$$\mu = P' - P = \frac{P}{2} \left(\sqrt{\frac{T_A}{T_C}} - 1 \right) \quad (12)$$

由於高、低溫氣體分子的撞擊，C板所受的力矩為

$$\tau = 2 \int_{w-d}^w \mu h x dx = \mu h [w^2 - (w-d)^2] = \mu h d (2w-d) \quad (13)$$

故達穩定態時，C板之偏轉角度 θ 為

$$\theta = \frac{\tau}{\kappa} = \frac{\mu h d}{\kappa} (2w-d) \quad (14)$$