2021年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊國際賽前集訓營

綜合考試(二)試題

2021年6月19日 08:30-12:30

一、 本試題共五大題，每一題 20 分，合計 100 分。

二、 考試時間四小時。

三、 在指定的**正面**答案紙上作答。

四、 可使用無程式掌上型計算機。

五、 限以藍色或黑色原子筆作答。

Theory 理論

General Data Sheet 通用數據表

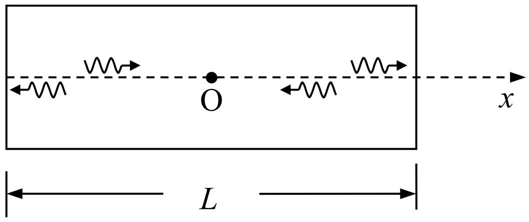
Permittivity of free space 真空中的電容率	ε_0	=	$8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$
Permeability of free space 真空中的磁導率	μ_0	=	$1.257 \times 10^{-6}\ \mathrm{T \cdot m \cdot A^{-1}}$
Speed of light in vacuum 真空中的光速	c	=	$2.998 \times 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
Elementary charge 基本電荷	e	=	$1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$
Electron mass 電子的質量	m_e	=	$9.109 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
Proton mass 質子的質量	m_p	=	$1.673 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Neutron mass 中子的質量	m_n	=	$1.675 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Gravitational constant 重力常數	G	=	$6.674 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^{2} \cdot kg^{-2}}$
Planck constant 普朗克常數	h	=	$6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$
Avogadro number 亞佛加厥數	N_A	=	$6.022 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
Boltzmann constant 波茲曼常數	k_B	=	$1.381 \times 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$
Universal gas constant 通用氣體常數	R	=	$8.314\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$
Stefan-Boltzmann constant 史特凡-波茲曼常數	σ	=	$5.670 \times 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$
Standard value of gravitational field at Earth’s surface 地球表面重力場標準值	g	=	$9.80665\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

2021 年物理奧林匹亞國家代表隊
國際賽前集訓營綜合考試(二)試題

本試題共有五大題，每一題 20 分，合計 100 分。

一、

考慮下述的理論模型：有一長度為 L 的密閉圓柱形空腔，靜止置放在光滑的水平桌面上，取其中心軸為 x 軸，圓柱的中心點 O 設為原點 $x=0$，如右圖一所示。空腔內充滿由不同頻率的光子組成的輻射，例如火爐、雷射腔等，假設所有的光子沿著平行於 x 軸的方向上作往復傳播，且該圓柱的左和右腔壁皆為完全反射平面。已知若單一光子的能量為 E_ν，頻率為 ν，則 $E_\nu = h\nu$，該光子的動量 $p_\nu = \dfrac{h\nu}{c}$，式中 h 為卜朗克常數，c 為真空中的光速，空腔內光子的總能量為 $U = \sum_\nu E_\nu$。由於光子通常被認為是沒有質量的粒子，但光子會對器壁產生輻射壓力，因此會對運動中的空腔產生影響。現在對圓柱空腔施一外力 F，使圓柱體沿 $+x$ 方向運動，但其速度 $V << c$。就實驗室慣性參考系的觀點，利用牛頓運動定律 $F = ma$，可推求該空腔內光子的等效總質量。（在計算中，僅保留 V/c 的最低次非零項。）



圖一

(a)若一光子沿 $+x$ 方向前進，經右邊腔壁平面反射後，傳遞給圓柱的動量為何？

(b)若一光子沿 $-x$ 方向前進，經左邊腔壁平面反射後，傳遞給圓柱的動量為何？

(c)同一個光子經左右腔壁平面來回反射後，對圓柱空腔產生的平均力為何？此平均力即是腔壁所受輻射壓力的來源。

(d)該空腔內光子的等效總質量為何？

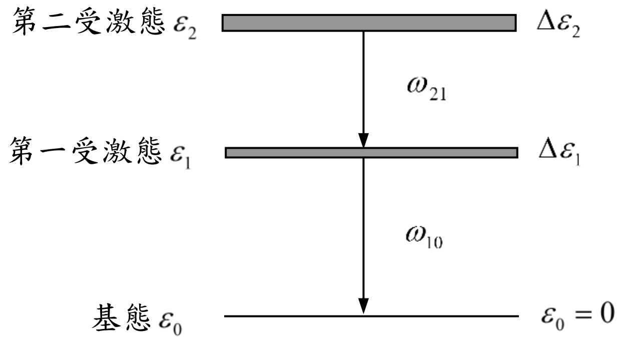
二、

當氣體發光時，會呈現明線光譜，各譜線的寬度主要來自於量子的不確定性和氣體分子熱運動的都卜勒效應。本題探討量子的不確定性效應對光譜線所造成的強度分布和半寬度。

由量子力學的測不準原理可知，原子所處能階的的不準量$\Delta\varepsilon$和其存活時間τ（稱為平均生命期 mean life time）的關係式為$(\Delta\varepsilon)\tau \geq \frac{\hbar}{2}$。因此當原子從高能階躍遷至低能階時，所發出的光子角頻率ω會有不準量$\Delta\omega$，如下圖所示，例如從第一激發態躍遷回基態時，所發出的光子頻率為ω_{10}，其不準量為

$$\omega_{10} \approx \frac{\Delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{\hbar} = \frac{\Delta\varepsilon_1}{\hbar} \approx \frac{1}{2\tau_1}$$

這種量子效應所造成的光譜線寬度，稱為自然譜線寬度（Natural Line Width)。



回答下列問題：

(a) 當粒子發生衰變時，其在每單位時間內的衰變機率為一常數，以γ表示之，稱為衰變常數。設$N(t)$為在時刻 t時存活的粒子數目，導出粒子的衰變定律：

$$N(t) = N_0 e^{-\gamma t}$$

式中N_0為起始時的粒子總數。

(b) 設粒子的波函數為$\Psi(t)$，則$|\Psi(t)|^2\Delta t$代表在時刻t和$t+\Delta t$之間，可以找到粒子存活在某一能態的機率。利用(1)題有關粒子的衰變敘述，證明：

$$\Psi(t) = \gamma^{1/2} e^{-\gamma t/2}$$

【註】：若$g(t) = \int_{A(t)}^{B(t)} f(x)dx$，則$\frac{dg(t)}{dt} = f(B(t))\frac{dB(t)}{dt} - f(A(t))\frac{dA(t)}{dt}$

(c) 利用上題的結果，導出粒子存活的平均生命期τ，和衰變常數γ之間的關係式。

(d) 當氣體原子從受激態降至基態時，會發出光子。光子具有波動和粒子的二象性，根據量子力學的理論，若光子的主頻率為ω_0，則該光子的時間波函數可寫為

$$\Psi(t) = C\left(\gamma^{1/2} e^{-\gamma t/2}\right) e^{-i\omega_0 t}$$

式中C為一常數。導出該光子所生成的光譜線強度分布的數學式，以ω和γ表示

之。

【註】：任何波形皆可視為有許多簡單的正弦波所組成，例如上述的一維時間波函數可寫為

$$\Psi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}A(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}\Psi(t)e^{-i\omega t}dt$$

式中$A(\omega)$為頻率為ω的成分波振幅，上兩式稱為傅立葉轉換。

（e） 當光譜線的強度降為其峰值的一半時，所對應的光子角頻率範圍$\Delta\omega$，稱為該光譜線的半寬度。導出半寬度的數學式，以ω和γ表示之。

三、

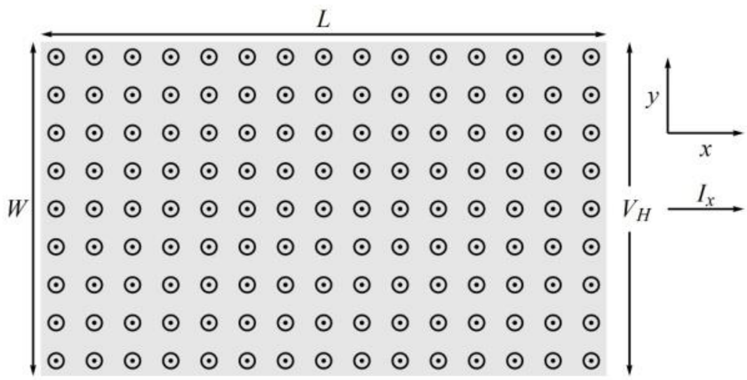
考慮一維的簡諧振子。由力學能守恆知$\frac{p^2}{2m}+\frac{m}{2}\omega^2x^2=E$。

(a) 利用 Sommerfeld 量子化法則: $\oint pdx=nh$，即動量對位移積分一個週期為普朗克常數h的整數倍，證明第n個量子態的能量為$E_n=n\hbar\omega$。(5 分)

(b) 已知電子的質量為m、電荷為$-e$，考慮電子在均勻磁場$\vec{B}=B\hat{z}$中的運動。由古典物理，我們知道電子在$x-y$平面上會作等速圓周運動，且等速圓周運動投影到x(或y)方向即為簡諧運動。利用(a)小題及前述結果，求電子在均勻磁場中的量子能階。這就是所謂的 Landau 能階。(4 分)

(c) 由(a)小題的結果，求電子在最低 Landau 能階時圓周運動的軌道半徑r_0。若電子被限制在一個面積為A的平面材料中運動，且$A\ll r_0^2$，求最低 Landau 能階的簡併數N_0，即狀態不同但能量相同的量子態個數。(4 分)

(d) 如圖二所示，考慮一長方形半導體，在均勻磁場下的電流傳導行為，單位面積的電子個數為n_e。當系統達到穩態時，垂直電流方向的兩側會產生霍爾電壓V_H，求霍爾電導$G_H=I_x/V_H$ (答案以e、B、n_e表示)。(4 分)



圖二

(e) 實驗上發現霍爾電導有量子化的現象，即$G_H=n\frac{e^2}{h}$，n是一個正整數，這就是所謂的整數量子霍爾效應。定義電子的填充因子(filling factor)$\nu=An_e/N_0$，用填充因子說明霍爾電導量子化對應的物理意義。(3 分)

提示: $\int_0^{x_0}\sqrt{x_0^2-x^2}dx=\pi x_0^2/4$。

四、

β-衰變實驗中，電子動能（K）連續分佈的數據是顯示微中子（ν）存在的重要實驗。例如：鉀的同位素${}^{40}_{19}\mathrm{K}$（其中數字 40 為原子量，即原子核內中子與質子的總數，19 為原子序，即為質子個數）會經由 β-衰變，衰變到鈣${}^{40}_{20}\mathrm{Ca}$，並且放出一個電子和一個微中子。

$$ {}^{40}_{19}\mathrm{K} \rightarrow {}^{40}_{20}\mathrm{Ca} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu} $$

其中$\bar{\nu}$為反微中子。考慮靜止的${}^{40}_{19}\mathrm{K}$ 進行 β-衰變。

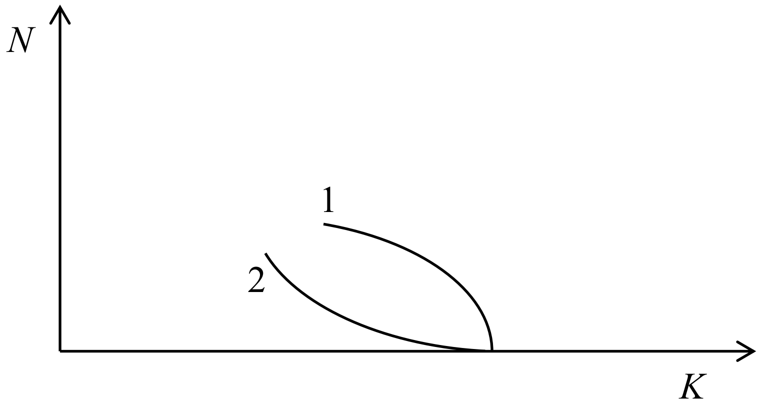
(A)在標準模型中，微中子、反微中子質量為零。在此一過程中，${}^{40}_{20}\mathrm{Ca}$動能可忽略，則電子的最大動能為？

(B)估算一下${}^{40}_{20}\mathrm{Ca}$的動能，說明此一動能確實可以忽略。

(C)我們目前知道 β-衰變是弱作用的過程，但早期並不知道此電子是如何產生的，如果此電子是一開始就存在於原子核內，已知原子核大小約為 1 費米（1 費米為$10^{-15}\mathrm{m}$），請由海森堡不確定原理估算電子在原子核內的動能大小。（經由與實驗數據比較，我們可由此推測此電子是額外產生的。）

(D)電子在最大動能附近的分佈情形可以用來判斷微中子是否有質量。已知在此過程中，若微中子質量為零時，電子具有動量大小 p的數目可表示為$N(p) = Ap^2q^2$，A 為常數，q 為反微中子此時的動量大小。則請說明，電子動能（K）分佈情形為下列圖三中的何者（1 或 2）？

註：${}^{40}_{19}\mathrm{K}$ 原子質量為 39.963999 u，${}^{40}_{20}\mathrm{Ca}$ 原子質量為 39.962591 u，1 u = 931.5 MeV/c^2，c 為光速，電子質量為 0.511 MeV/c^2，$\hbar = 0.6528 \times 10^{-15}\mathrm{eV \cdot sec}$。



圖三

五、

假設已知彈性繩上的波動可以用一維波動方程式描述，其形式為$\partial_t^2\psi - v^2\,\partial_x^2\psi = 0$，

其中$v = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}$是波速，Y是繩子的楊氏係數，μ是繩子的線質量密度，$\partial_t^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$,

$\partial_x^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$。若$x < 0$的區域為介質 1，其線密度為$\mu_1$，對應的波速為$v_1$，而$x \geq 0$的

區域為介質 2，其線密度為μ_2，對應的波速為v_2，繩子的楊氏係數Y則維持不變。考慮有一個弦波由介質 1 向右傳向介質 2，這個入射波在兩個介質的交界處（$x = 0$）會同時發生透射與反射。我們可以用下列方法求出反射波與入射波振幅比值r及透射波與入射波振幅比值t：

當$x < 0$時，$\psi(x,t) = \mathrm{Re}\left\{\psi_{\mathrm{I}} e^{i(k_1 x - \omega t)} + \psi_{\mathrm{R}} e^{i(-k_1 x - \omega t)}\right\}$，其中第一、二項分別描述入射波和反射波；當$x \geq 0$時，$\psi(x,t) = \mathrm{Re}\left\{\psi_{\mathrm{T}} e^{i(k_2 x - \omega t)}\right\}$，這一項描述的是透射波。接著我們要求波函數$\psi(x,t)$在$x = 0$處的函數值及對$x$的一階微分連續。

(A) 利用波動方程式，分別在介質 1 及介質 2 中，求ω與k的關係，即色散關係。

(B) 承(A)小題，用前述方法求出$r = \psi_{\mathrm{R}}/\psi_{\mathrm{I}}$及$t = \psi_{\mathrm{T}}/\psi_{\mathrm{I}}$，以$v_1, v_2$表示。

$Y(\partial_x \psi)$為彈性繩在x處所受的張力，而$(\partial_t \psi)$是彈性繩在x處的運動速度，因此從繩波上能量傳遞的觀點來看，能量流j正比於$Y(\partial_x \psi)(\partial_t \psi)$。我們可以由與$\psi_{\mathrm{I}}, \psi_{\mathrm{R}}, \psi_{\mathrm{T}}$有關的項分別求出$j_{\mathrm{I}}, j_{\mathrm{R}}, j_{\mathrm{T}}$。接著我們可以定義反射率$R = j_{\mathrm{R}}/j_{\mathrm{I}}$及透射率$T = j_{\mathrm{T}}/j_{\mathrm{I}}$。

(C) 求反射率R及透射率T。R與T滿足什麼關係？解釋你得到的結果。

上述的步驟可以推廣到其它種類的波動，如電磁波和量子力學的物質波。假設已知物質波遵守薛丁格方程式，其一維形式為$i\hbar\,\partial_t \psi - \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 \psi + V(x)\psi\right\} = 0$，其中$\hbar = \frac{h}{2\pi}$是縮減普朗克常數，而$m$是粒子的質量，$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 \psi$這項與粒子的動能有關，而$V(x)\psi$這項則與粒子的位能有關。若在介質 1$(x < 0)$中，$V(x) = 0$，$\psi(x,t) = \mathrm{Re}\left\{\psi_I e^{i(k_1 x - \omega t)} + \psi_R e^{i(-k_1 x - \omega t)}\right\}$；而在介質 2$(x \geq 0)$中，$V(x) = V_0$，$\psi(x,t) = \mathrm{Re}\left\{\psi_T e^{i(k_2 x - \omega t)}\right\}$。這裡的$\hbar\omega$對應到粒子的”力學能”，而$\hbar k_1$與$\hbar k_2$則對應到粒子在介質 1 和介質 2 中的動量。

(D) 考慮$\omega > 0$，且$\hbar\omega - V_0 > 0$。利用薛丁格方程式，分別求在介質 1 及介質 2 中的色散關係。

(E) 承(D)小題，求r及t，以k_1, k_2表示。

(F) 考慮$\omega > 0$，但$\hbar\omega - V_0 < 0$。此時，在$x \geq 0$的區域內，粒子的力學能小於其位能，因此這個區域稱為古典禁區。在量子力學中，在$x \geq 0$區域粒子的波函數並不為零，而是呈指數衰減，即$\psi(x,t) = \mathrm{Re}\left\{\psi_T e^{(-\kappa_2 x - i\omega t)}\right\}$，$\kappa_2 > 0$。求此時$\omega$與$\kappa_2$的關係。

(G) 承(F)小題，求r及t，以k_1, κ_2表示。

若已知物質波的”粒子流”可由下式求得：$j = \mathrm{Re}\left\{\psi^{*}\left(\frac{-i\hbar}{m}\partial_{x}\psi\right)\right\}$。我們一樣可以由與$\psi_{\mathrm{I}}, \psi_{\mathrm{R}}, \psi_{\mathrm{T}}$有關的項分別求出$j_{\mathrm{I}}, j_{\mathrm{R}}, j_{\mathrm{T}}$並定義反射率$R = j_{\mathrm{R}}/j_{\mathrm{I}}$及透射率$T = j_{\mathrm{T}}/j_{\mathrm{I}}$。

(H) 若$\omega > 0$，且$\hbar\omega - V_0 > 0$，求反射率R及透射率T。R與T滿足什麼關係?解釋你得到的結果。

(I) 若$\omega > 0$，且$\hbar\omega - V_0 < 0$，求反射率R及透射率T並解釋你得到的結果。