

2021年國際物理奧林匹亞競賽

國家代表隊國際賽前集訓營

綜合考試(一)試題

2021年6月17日 08:30-12:30

- 一、 本試題共五大題，每一題 20 分，合計 100 分。
- 二、 考試時間四小時。
- 三、 在指定的**正面**答案紙上作答。
- 四、 可使用無程式掌上型計算機。
- 五、 限以藍色或黑色原子筆作答。

Theory 理論

General Data Sheet 通用數據表

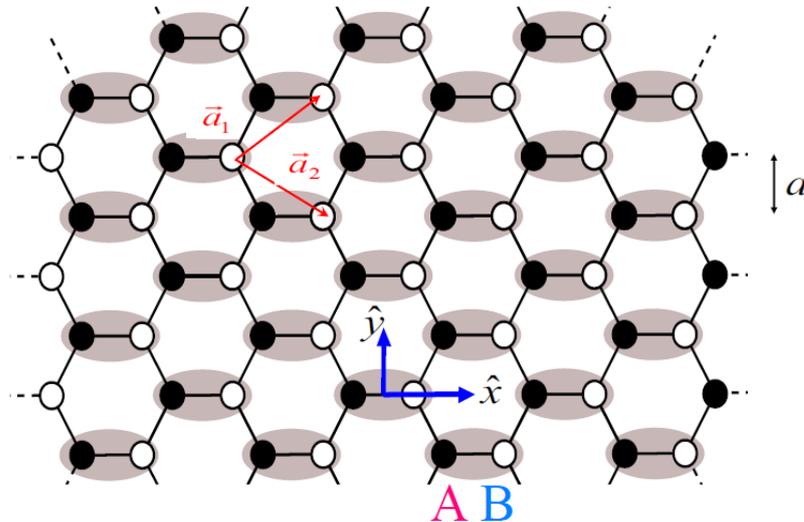
Permittivity of free space 真空中的電容率	ϵ_0	=	$8.854 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Permeability of free space 真空中的磁導率	μ_0	=	$1.257 \times 10^{-6} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$
Speed of light in vacuum 真空中的光速	c	=	$2.998 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Elementary charge 基本電荷	e	=	$1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Electron mass 電子的質量	m_e	=	$9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Proton mass 質子的質量	m_p	=	$1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Neutron mass 中子的質量	m_n	=	$1.675 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Gravitational constant 重力常數	G	=	$6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
Planck constant 普朗克常數	h	=	$6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Avogadro number 亞佛加厥數	N_A	=	$6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmann constant 波茲曼常數	k_B	=	$1.381 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Universal gas constant 通用氣體常數	R	=	$8.314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Stefan-Boltzmann constant 史特凡-波茲曼常數	σ	=	$5.670 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
Standard value of gravitational field at Earth' s surface 地球表面重力場標準值	g	=	$9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

2021 年物理奧林匹亞國家代表隊
國際賽前集訓營綜合考試(一)試題

本試題共有五大題，每一題 20 分，合計 100 分。

一、晶格中的繞射

- (A) 考慮沿 \hat{x} 方向的一維晶格，晶格週期長度為 a ，有波長為 λ 的平面波沿 $-\hat{z}$ 方向射向該一維晶格：
- (a) 試求透射波在 xz 面上建設性干涉的方向，以波的方向與 $-\hat{z}$ 所形成夾角 θ_f 表示之。
- (b) 試求以上建設性干涉波的波向量改變 $\Delta\vec{k} \cdot \hat{x} = (\vec{k}_f - \vec{k}_i) \cdot \hat{x}$ 。
 \vec{k}_i 為入射波的波向量， \vec{k}_f 為入射波的波向量。
- (B) 考慮二維晶格，如下圖所示為碳原子所形成的單原子層蜂窩狀晶格結構，稱為石墨烯結構。晶格中每一個單元有兩個碳原子，圖中以 A (黑圓點) B (白圓點) 標示，晶格週期以向量 \vec{a}_1 、 \vec{a}_2 表示， $a = 1.23 \text{ \AA}$ ，圖中碳鍵(黑線條)之間的夾角皆為 120° 。



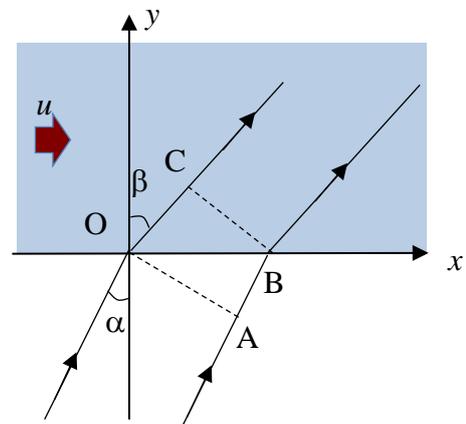
今以電子沿 $-\hat{z}$ 方向入射，考慮透射繞射情形。

- (a) 入射電子入射前先經過 1 kV 加速電壓的加速，試求電子的波長 λ 與波向量量值 k_i 。
- (b) 若石墨烯樣品由多個晶格區域構成，各晶格區域有各自的晶格方向，使電子在穿透石墨烯樣品後在成像處所形成的成像呈環狀干涉條紋，試求半徑最小的三個環狀干涉條紋的半徑。成像處與石墨烯樣品在 z 方向上的距離為 L ，約為毫米等級。
- (c) 若石墨烯樣品為單一晶體，試描繪出上題中三個環狀條紋所對應的干涉亮點。

- (d) 承上題，試討論 A 與 B 原子對三組干涉亮點強度的影響。
- (e) 原子束半徑調至石墨烯樣品的大小(約為毫米等級)，若石墨烯樣品為單一晶體，試描繪出干涉圖形。
- (f) 原子束半徑調至石墨烯樣品的大小(約為毫米等級)，若石墨烯樣品主要含有兩個晶格區域(如在銅(001)面上的石墨烯)，而兩個晶格區域的石墨烯晶向約有以 z 軸轉 15° 的角度差，試描繪出干涉圖形。

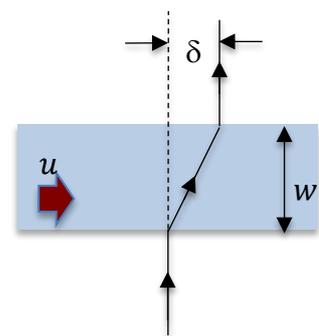
二、空氣流動所造成的光偏折效應

除了折射率的變化會使光偏折外，空氣的流動也會造成光線的額外偏移。圖二為光線由真空入射一沿界面 x 方向以速度 u 運動之流體的示意圖。為求出入射角 α 與折射角 β 之關係，設 O 為原點， \overline{OA} 為入射光在 $t = 0$ 時(光波恰要進入介質前)的波前， \overline{BC} 則是在 $t = t_0$ 時(光波恰完全進入介質後)的波前。設介質靜止時之折射率為 n ，真空之光速為 c ，試回答以下問題：



圖二

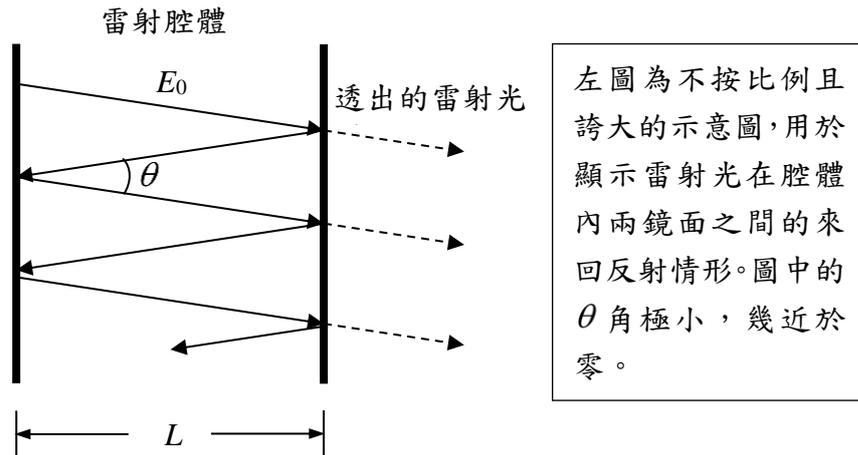
- (a) 不考慮相對論效應，設 C 點之座標為 (x_0, y_0) ，試求波前 \overline{BC} 的方程式。(以 x_0, y_0, u, t 表示) (3 分)
- (b) 利用(a)求出 x_0 與 y_0 ，並由此求出入射角 α 與折射角 β 之關係式。(以 α, β, u, c 與 n 表示)(6 分)
- (c) 當介質流動時，即使入射光垂直入射介質(厚度為 w)，光波仍會有橫向位移，如圖三所示。設介質靜止時，入射角為 α 之折射角為 β_0 ，試求 $\Delta\beta = \beta - \beta_0$ 精確到 u/c 一次項，並由此求出橫向的位移 δ 精確到 u/c 的一次項。(6 分)



圖三

三、雷射腔內的駐波

在雷射腔體的兩端面處各置有一個鏡面，用於反射雷射光。鏡面的反射率 $R = r^2$ ， R 定義為反射光和入射光的光強比值； r 稱為反射係數，定義為反射光和入射光的電場振幅的比值。高反射率的鏡面 (R 值約為 0.99) 能使腔體內的雷射光，在兩鏡面之間經歷連續多次的來回反射 (參看圖四)，而光強不至於大幅減弱，因此能在腔體內形成駐波。設兩鏡面之間的距離為 L ，雷射腔體內的光速為 c ，雷射光的頻率為 f ，考慮雷射光在腔體內形成的縱向模 (longitudinal mode) 駐波，回答下列問題：

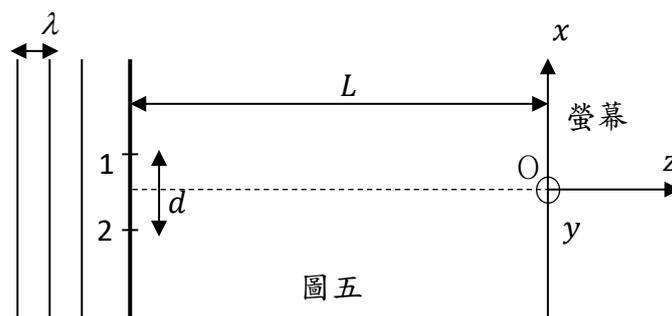


圖四

- (A) 雷射光在兩鏡面之間來回反射一次，所經歷的相角變化為何？以 L 、 c 、和 f 表示之。
- (B) 在腔體內能維持縱向模駐波的頻率為何？又這種縱向模駐波頻率的最小間隔為何？兩者皆以 L 和 c 表示之。
- (C) 導出從腔體一端透射出的雷射光強的表示式，以 L 、 f 、和 R 表示之。
- (D) 若雷射光的頻率偏離駐波頻率的許可值，則透射出的雷射光強會隨之減弱。利用前述三小題的結果，計算當透出的雷射光強減至其最大值的一半時，上述雷射光頻率的偏差量為何？

四、雙狹縫與干涉測量術

(a) 如圖五所示，一波長為 λ 之平行光通過一雙狹縫再投射在一螢幕上，設狹縫相距為 d ，且狹縫本身寬度的效果可被忽略，假設 $L \gg d$ ，若當一個狹縫被遮住時螢幕中央 O 點之光強度為 I_0 ，則當兩個狹縫皆打開時，若不考慮光



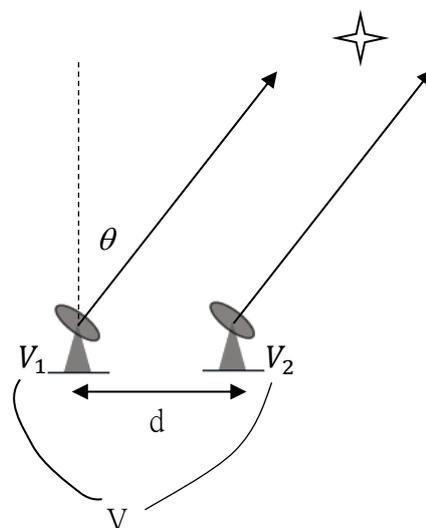
圖五

的偏振性，試求螢幕上在 O 點附近(即 $|x| \ll L$)光強度與 x 的關係。已知光強度與電場 E 之平方在一個週期 T 之平均值 $\langle E^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt E^2$ 成正比。

註：在以下的問題中，皆以 $\langle A \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt A(t)$ 表示物理量 A 的平均值；例如 $A = \sin(\frac{2\pi t}{T})$ ，

則平均值為 $\frac{1}{T} \int_0^T dt \sin(\frac{2\pi t}{T}) = 0$ 。

(b) 在天文測量上，雙狹縫干涉被應用在無線電干涉儀以測量星體。由於所測量的光波波長甚長，與光學的雙狹縫不同的是無法先形成干涉條紋再行觀察，而是在地面上使用兩個天線接收天體的無線電波，如圖六所示。設星體之方向與鉛直方向之夾角為 θ ，設來自星體之無線電波波長為 λ ，兩個天線所接收到訊號各為 V_1 與 V_2 ，此訊號包括星體的訊號再加上天線自己內部可能的雜訊 V_n ，假設雜訊 $\langle V_n \rangle = 0$ ，且各天線的雜訊互不相關且與星體訊號無關。



圖六

(i) 已知有兩種組合 V_1 與 V_2 以求出星體訊號的方式：

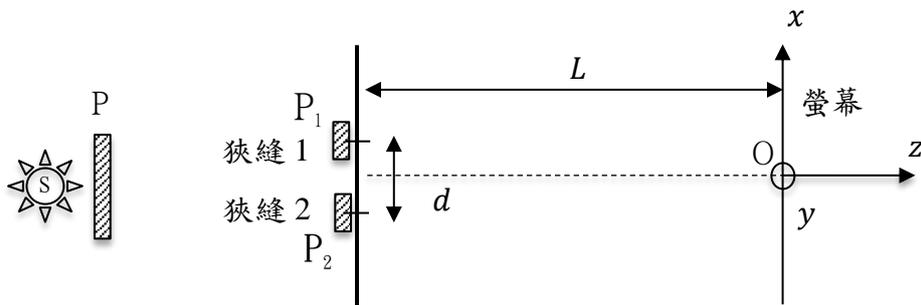
$\langle (V_1 + V_2)^2 \rangle$ (即 $V = V_1 + V_2$ ，與雙狹縫一樣求強度)及 $\langle V_1 V_2 \rangle$ ，試問那一個測量組合的結果受雜訊影響最小？

(ii) 若採用 $\langle V_1 V_2 \rangle$ 為 t 時刻之測量訊號 $C(t)$ ，星體訊號之振幅為 V ，當星體之方向與鉛直方向之夾角為 $\theta(t)$ 時，試求 $C(t)$ 。

(iii) 考慮地球的自轉，並考慮天線面積是有限，作觀測訊號對時間 t 之大致作圖。

(iv) 設 $d = 100\text{km}$ ，無線電波頻率 1GHz ，估算測量訊號中快速振盪的角頻率之數量級。註：實際的天文觀測使用兩個以上天線並形成天線陣列。

(c) 雙狹縫干涉的結果與入射光之偏振狀態有關，如圖七所示，光源 S 、狹縫前各放置偏振片 P 、 P_1 與 P_2 ，其中偏振片的偏振軸在 $x-y$ 平面上。假設在由狹縫傳播到螢幕上干涉的區域之光波的偏振方向皆可視為在 $x-y$ 平面上，試回答以下問題：

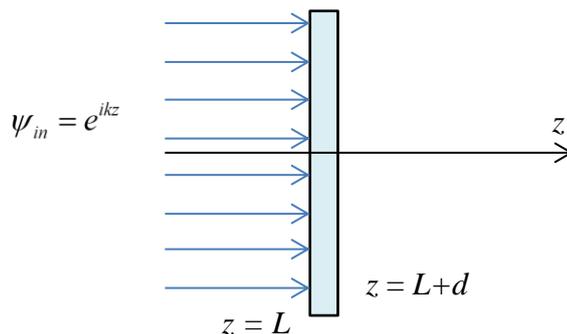


圖七

- (i) 設 P 對光波電場之偏振軸為 x 軸，若將 P_2 的偏振軸也定在 x 軸，而改變 P_1 偏振軸相對 x 軸之角度為 α ，如同(a)小題，設狹縫 1 被遮住時螢幕中央 O 點之光強度為 I_0 當兩個狹縫皆打開時，試求螢幕上光強度與 x 的關係(以 d, x, L, λ 與 I_0 表示)。試問當 P_1 偏振軸與 P_2 的偏振軸互相垂直時，螢幕上干涉的條紋為何？
- (ii) 今將偏振片 P 移除，假設光源 S 產生的光波不具偏振性，即若產生光波在空間某一點的電場為 $(A_x(t), A_y(t))$ ，則 $\langle A_x(t)A_y(t) \rangle = 0$ ， $\langle A_x(t)A_x(t) \rangle = \langle A_y(t)A_y(t) \rangle \neq 0$ ，換句話說不具偏振性的光波可視為兩獨立且偏振性互相垂直的光波。對正弦波來說， $A_x(t) = A \cos(\omega t + \phi_x)$ ， $A_y(t) = A \cos(\omega t + \phi_y)$ ，造成互相獨立的原因為光波波源發射光波時所造成任意不相干相位 ϕ_x 與 ϕ_y 之故。假設 P_1 的偏振軸與 P_2 的偏振軸與 (i) 小題設定一樣，試求螢幕上光強度與 x 的關係。(以 d, x, L, λ 與 I_0 表示)
- 註： $n = 1, 2, 3, \dots$ ， $\langle \cos n(\omega t + \phi_x) \rangle = 0$ ， $\langle \cos n(\omega t + \phi_y) \rangle = 0$
- (iii) 今將偏振片 P ， P_1 與 P_2 全移除，假設光源 S 產生的光波不具偏振性，試問螢幕上光強度與 x 的關係，證明並推導你的答案。(以 d, x, L, λ 與 I_0 表示)

五、X 光在物質中的折射係數 n

由於 X 光的頻率比物質中原子的躍遷頻率要高(除了內層 K 或 L 電子:本題忽略這些內層電子對 X 光的折射係數的貢獻), 因此原子的電子在 X 光中的反應, 可視為自由電子的反應。這些自由電子在入射 X 光驅動下產生輻射波, 從而產生對 X 光在塊材中折射係



圖八

數的貢獻。考慮一塊極薄的物質塊材, 其厚度為 d , 塊材的邊長遠大於波長, 面積可視為無窮大; 塊材中原子數密度為 ρ (m^{-3}), 每個原子的電子數為 N , 塊材的折射係數 n (n 極接近數值 1)。X 光自左向右沿 $+z$ 方向垂直入射塊材, 如圖八所示, 其在這極薄的塊材中的反射與多重反射皆忽略, 塊材的左面位置為 $z=L$, 右面的位置為 $z=L+d$ 。

(a) 若入射 X 光表示為 $\psi_{in} = e^{ikz}$, 試寫出在穿過塊材後 X 光在 z ($z > L+d$) 處的波 ψ_t 的表達式。在 d 很微小的情形下, 透射的 X 光可以寫成 $\psi_t = \psi_{in} + \delta\psi$, 且 $\delta\psi = C \psi_{in}$, 試求係數 C 的表達式。

(b) 在 X 光 $\psi_{in} = e^{ikz}$ 的作用下, 一個電子的輻射波為

$$-\frac{b}{|\vec{r}-\vec{R}|} e^{ik|\vec{r}-\vec{R}|} \psi_{in}(\vec{R}) \approx -\frac{b}{D} e^{ik|\vec{r}-\vec{R}|} \psi_{in}(\vec{R}),$$

上式中負號代表電子輻射波與 ψ_{in} 的相位差為 π , \vec{r} 為觀察點的位置, \vec{R} 為原子中電子的位置, $-b$ 代表電子的散射幅度, $b > 0$ 為量值。試寫出在穿過塊材後 X 光在 z ($z \gg d$ 時, $D \approx z-L$) 處的波 ψ_t 的表達式, 以 b 等參數表示之。

(c) 比較(a) 與(b)的結果, 求出折射係數 n 的表達式。

(d) 若 $k = 4 \text{ \AA}^{-1}$, $N\rho = 1 \text{ \AA}^{-3}$, $b = 2.82 \times 10^{-5} \text{ \AA}$, 求 n 的數值。

【註】 $\int_{-\infty}^{\infty} du e^{iu^2} = \sqrt{i\pi}$