吳昭容、黃一蘋（2003） **國民教育，43**（3），29-32。

怎樣「簡化」數學文字題？

吳昭容、黃一蘋

數學文字題的解題向來是國小數學教學的主體，因為文字題的情境提供了數學概念或運算與生活間的聯繫，使得數學具有解決生活問題的意義。但有部分兒童無法理解題意，只能以題目中的數字胡亂地加減乘除一番，要不然就是勉強以一些關鍵字為線索解題。但關鍵字經常是有侷限性的，有「倍」不一定適用於乘法，有「比」也不保證用減法就正確，致使這些無法理解題意的兒童視解決文字題為畏途。許多數學教育研究者探討解題策略與教學法，而現場教師亦會引導學童發展各種解題策略，以有效處理文字題的解題。其中一種常見的方式是「簡化」文字題，例如為了讓學童理解植樹問題為何要多加一棵數，所以減少總路長和間距，以便學童觀察到二者與未知數間的關係。本文將從一個補救教學的實際案例開始，並舉一個班級教學的例子，討論如何簡化文字題才能有效發展學童解題的能力。

比例問題

本文第二作者在九十一年七月至八月間曾進行一個個案的學習輔導。個案是一名即將升上六年級的男生，四年級以前的數學成績在班上為中上程度，升上五年級後，經常出現三十幾分，甚至完全沒有作答的情況，成績最好就是勉強及格。小偉的作業訂正草率，對考試成績不佳不以為意，但人際關係良好，家人關係和樂，在校也沒有常規問題，同時諸多現象顯示個案沒有智能低下的問題。

個案對於五下一則比例問題甚感困難，原題目為

29/7 公升的沙拉油有 4 公斤重時，多少公升的沙拉油會有 20 公斤重？

由於個案完全無法理解題意，教學者將第二句遮住，要求個案集中注意在第一句，看是否能看懂第一句，個案表示不懂。教學者在第一句的正下方寫下

(　　)公升的沙拉油有 4 公斤重時

並問個案括號內如果填入什麼樣的整數，他會比較容易理解。個案填了「2」。問個案那麼這句話「2 公升的沙拉油有 4 公斤重」是什麼意思，個案仍然無法清楚地表示，教學者寫了一個類似的例子在旁邊

(2)隻豬有 4 公斤重

個案馬上接口說「哦！那就是一隻豬有 2 公斤重」。

上述的歷程中，教學者用了兩個簡化文字題的技巧，其中反映了教學者對學

童在哪類的數與量上會感到困難，有清楚的掌握。首先教學者將 29/7 這個分數換成整數，是因為許多國小學童在處理分數或小數時有困擾，即使不要求計算，光是看到含有分數或小數的文字題，就覺得看不懂，所以，學童的困難基本上是無法具體掌握一個非整數所表示的大小。其實許多大人也有類似的問題，我們對一些特定的分數比較能掌握，例如 1/2，或 3/4，至於 29/7 這種「奇怪」的分數，連大人都得在約估出 29/7 大約比 4 多一些（亦即找到 4 為參照點）之後，才覺得比較踏實一點。所以學童一看到這類奇怪的分數，在還沒進行任何計算之前，就已經覺得無法思考，這一點都不足為奇。這樣的問題在數學教育裡，通常稱為數感(number sense)，也就是掌握某一個數字代表多大或多小，以及計算後之效果的能力。

另一個簡化的技巧是用在將連續量的情境換成離散量的情境。由於原本的文字題中含有兩個連續量，一則「公升」與「公斤」兩個單位名稱很容易混淆，再則，對「一公升到底是多少？」「一公斤有多重？」沒感覺的學童，又再一次落入無法想像題目意義的狀態。後者在數學教育中，我們稱為量感，也就是能夠想像一公斤大約多重，或是約估一個物體約有多少公斤的能力（　　）。相對地，如果「2 公升的沙拉油有 4 公斤重」換成「2 罐沙拉油有 4 公斤重」，就變得容易理解得多了，因為單位之間不易混淆，同時將「公升」這樣的連續量換成「罐」這種離散量，腦海中也容易想像空間上分離的兩罐沙拉油，這使得學童容易運作語詞的意義。

接著教學者要求小偉將文字題的第二句整理對應到第一句的下面，形成

(2)公升的沙拉油有 4 公斤重時
(　　)公升的沙拉油會有 20 公斤重？

小偉馬上說「那就是 10 公升嘛！」教學者要求他把想法說清楚，「10 是怎麼算出來的？」小偉答「2×5 啊！」「5 是怎麼跑出來的」「20÷4＝5」「把你的想法重新寫一遍」小偉原本寫成

20÷4＝5×2＝10

教學者要求小偉寫成合法的算式，也就是分成兩個算式 20÷4＝5, 5×2＝10 書寫。接著「現在你們已經學過比例的寫法，剛剛那個算式請你改成比例的寫法。」小偉可以列成 2：4＝（　）：20，教學者要求小偉把剛剛的多步驟解題歷程與比例的算式連結起來，「你剛剛的 20÷4＝5，5×2＝10，和這個算式有什麼關係？」小偉可以指出四個數的比例關係

2：4＝（　）：20

這一部份教學者要求小偉把解題歷程說明一次是非常重要的步驟。有些老師以為簡化數字或情境後學生能夠得出答案，就代表他懂了，所以，馬上回到原來的問題，希望學生可以馬上將剛剛的解題歷程遷移過來，但有時學生回到原來問題情境，就又卡住了，老師對此百思不得其解。其中一種可能的原因就是，簡單情境的答案對學生而言，可能是忽然從腦海中跳出來的，就像小偉很快地回答：「那就是 10 公升嘛！」因為數量之間呈現簡單的關係，而數字簡化後的運算也隨之簡單許多，兒童掌握的數量關係後，自動化的計算過程隨之執行，答案就跳出來了。但這個過程欠缺有意識地監控，所以，已經答出答案的兒童不一定能夠說明解題歷程，也不一定能列出正確的算式，違論把這樣的解題歷程遷移到困難的問題情境。所以，留在簡單的問題情境中，透過解題歷程的紀錄有意識地把整個解題流程走過一遍，是完成整個解題歷程所必要的。

回到原本的分數題，小偉可以很快地列出正確的比例算式，並進行演算。

$$20\div4=5,\ \frac{29}{7}\times5=\frac{145}{7}=20\frac{5}{7}$$

這是因為之前的補救教學幫小偉補齊了一部份的分數概念與計算能力，有些孩子尚未掌握分數的四則運算，那麼就得重頭補起了。

加數未知題

第一作者曾在一個二年級班級中進行二下一整個學期的臨床教學，採用的教科書是國編本，有個單元其中進行了加數未知與減數未知的兩個教學活動。在教學之初就約有三分之二的孩子會列出減法算式，這有點出乎我的意料之外，因為這樣的題目是有一定的難度的。所以我追問其中一些會解題的孩子，「為什麼要用減法？」他們說不出所以然，其中有孩子說了「因為安親班的老師說，就是大數減小數就對了。」這在本單元雖然恰可解決加數未知與減數未知的問題，但未來遇到被減數未知的問題時，大數減小數的作法就無法奏效了。這種不求理解、只求解決當前這一單元的問題的教學方式，與課程真正想發展孩子數學能力的目的背道而馳。那該如何發展真正的解題能力呢？簡化問題可能是途徑之一。

加數未知的問題與孩子生活中會處理的哪些問題有關呢？例如樸克牌中的撿紅點或是存錢買東西。手上有張 4 的樸克牌，孩子心中會暗暗祈禱可以翻到一張 6，這其實符合 4+(　)=10 的加數未知題。類似地，想買個 80 元的小東西，而錢包中只有 55，那還得存多少錢呢？這是 55+(　)=80 的加數未知題。玩樸克牌時孩子解題得很自然，但為何換個文字題的情境，或是換個數字 4+(　)=15 就不會算了呢？

我們可以想像一個初次玩撿紅點的孩子，他透過具體物的點數完成遊戲，例如手上有 4，就會想辦法和攤開的牌湊湊看，「**4**—5, 6, 7, 8, 9，哦，沒有！」「**4**—5,

6, 7, 8, 9, **10**，就是這張，**6**」，經過多次配對學習後，哪個數字和哪個數字可以配成整 10，孩子就非常熟練了。以後玩撿紅點時，這種配成整 10 的自動化歷程就會自動執行，抽到一張 4，就會馬上找找看有沒有 6。但數學課堂中的加數未知不會總是湊整 10，雖然這會是很好的起點問題。所以，面對 4+( )=15，孩子需要一些策略才能解題。他可能會以往上數(counting on)的方式解題，一邊扳著手指頭紀錄加數，一邊口中唸著和數，「**4**—5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15」，看看手指頭扳了幾根，那就是答案了。所以，一下或二上的課程中，或許會有這類數量較小的加數或減數未知題，同時也容許學童用扳手指、畫圖的方式紀錄。

到了二年級下學期時，兒童要解決如 25+( )=73 這類的文字題或計算題了，一則和數是各式各樣的數字，不是兒童非常熟悉的整 10，自動化配對歷程無法執行。另外扳手指的策略也不容易採用，因為數字過大會弄不清楚指頭被扳下、扳上，扳了幾回合了？即使好不容易扳出答案來，也只有一個數字，無法有算式的紀錄過程，就無法符合課程中的要求「把你的作法記錄下來」。在紙上畫圈圈記錄或許可行，但很瑣碎，容易不小心作錯。雖然教師手冊中猜想部分孩子的自然想法是

25+10=35, 35+10=45, 45+10=55, 55+10=65, 65+8=73
10+10=20, 20+10=30, 30+10=40, 40+8=48

但實際教學上發現，會很自然地採用這種方式解題的孩子很少見，因為這需要很純熟的數的分解合成概念，同時會將此一概念與往上數或扳手指的程序連結，才會想到要用這樣的紀錄方式來「翻譯」累一的解題歷程。所以，顯然此時需要兒童去發掘 25+( )=73 與 73-25=( )之間的關連性。

對許多成人而言，是透過移項法則把 25+( )=73 置換成 73-25=( )的，也就是等號兩邊同減一數（如 25），等號兩邊的相等關係不會改變，移項法則來自數學上的「等量公理」。可是這些話說給二下的孩子聽，那就只能要他們背下來了。我們認為簡化會是一個可行的途徑。

讓解題先回到湊整 10 的活動中，在撿紅點或有情境的文字題脈絡下，孩子可以很容易就解出 4+( )=10、8+( )=10、7+( )=10、2+( )=10、9+( )=10 各題。這些算式與解答均得紀錄在黑板上，接著老師可以讓孩子說說看，怎麼算出( )是多少？可能有孩子會提到往上數的策略，老師可以追問有沒有什麼更快的方式？可能就會有孩子指出用和數減去被加數，此時大家可以用此一方式檢查一遍黑板上的各算式，同時老師可以追問兒童「為什麼會這樣？」，以確立被加數、加數，與和數之間的部分整體關係。接著把數字擴大到和數非整 10、但數字不大的情境，使兒童可以用往上數策略檢驗，例如 4+( )=13、7+( )=15…等，等孩子們可以安心地把這個部分整體關係應用到不止和數為整 10 的情境後，老師就可以將問題回到原本的 25+( )=73 上，讓兒童以部分整體關係來理解題意，同時以置換過的算式 73-25=( )求算答案。

吳昭容、黃一蘋（2003） **國民教育，43**（3），29-32。

程序性知識與概念性知識的聯繫

以往以教師為中心、重視快速與正確演算能力的教學，被批評為忽略了兒童的理解。目前以兒童為中心、強調理解的數學教學，又被質疑解題歷程過於笨拙、緩慢。這在數學教學心理學中，恰是概念性知識(conceptual knowledge)與程序性知識(procedural knowledge)是否聯繫妥適的問題，而本文的目的就在於以上述二實例，說明兩種知識的聯繫是需要數學教師細膩布置的。

為了讓兒童對解題產生理解，通常教師會布置一個簡易的問題情境，例如 4＋(　)=10，以便兒童從他已具備的概念性知識出發，建構自己的解題歷程；補救教學時亦同，教師會將大數量、複雜的文字題情境先加以簡化，因為簡化的問題具有讓孩子真正理解題意、有意義地解題的功能。要能夠順暢地運用「簡化」的技巧進行教學，教師首要之務是清楚地瞭解哪些數、量，或語句敘述方式對學童是困難的？而換成什麼樣的型態就會變得容易？多數家長或是新手教師之所以無法協助不會解題的孩子，常是因為「這個題目有什麼難的呢？」當教學者無法掌握問題情境對學童認知的難易度，就無法調整題目的數、量，或語句敘述方式，讓學童可以理解題意。掌握學童對數、量，或語句敘述方式的認知難易度，許多專家教師是來自多年教學經驗的累積，看多了學生那些題目容易作錯，那些題目會解題，慢慢地就形成了對學童認知狀態的莫會知識（tacit knowledge），也就是說不上來，但會處理。新手教師若想快速累積這樣的知識，一則可以多發點心思分析兒童解題時的錯誤類型、猜測其產生的原因，再則就是多多閱讀數學教學的文獻，這些學術研究的資料會告訴我們相關的知識。

讓兒童覺得數學問題是有意義的、自己是有能力的，的確是數學教育中非常重要的事，但是簡化情境下所產生的解題歷程未必適用於大數量、複雜情境的問題之解題，就如同扳手指的解題方式不適合解 25+(　)=73 一般，複雜文字題的解題可能需要一個不盡相同的解題程序。許多老師都同意程序性知識是很重要的，例如以 y-x 可以解 x+(　)=y 的問題，就是一種重要的程序性知識，但欠缺細緻的教學安排、只把程序性知識直接告知，豈不是浪費了之前以簡化的文字題佈局的苦心了嗎？所以，教師除了顧及兒童需要從自身的概念性知識出發之外，也要讓他們與適當的程序性知識聯繫上，本文藉兩個例子說明作者所想的聯繫方式之一。