《從數學看人類的進步軌跡》書評

台師大數學系 黃建豪

書名：從數學看人類進步的軌跡

作者：小島寬之

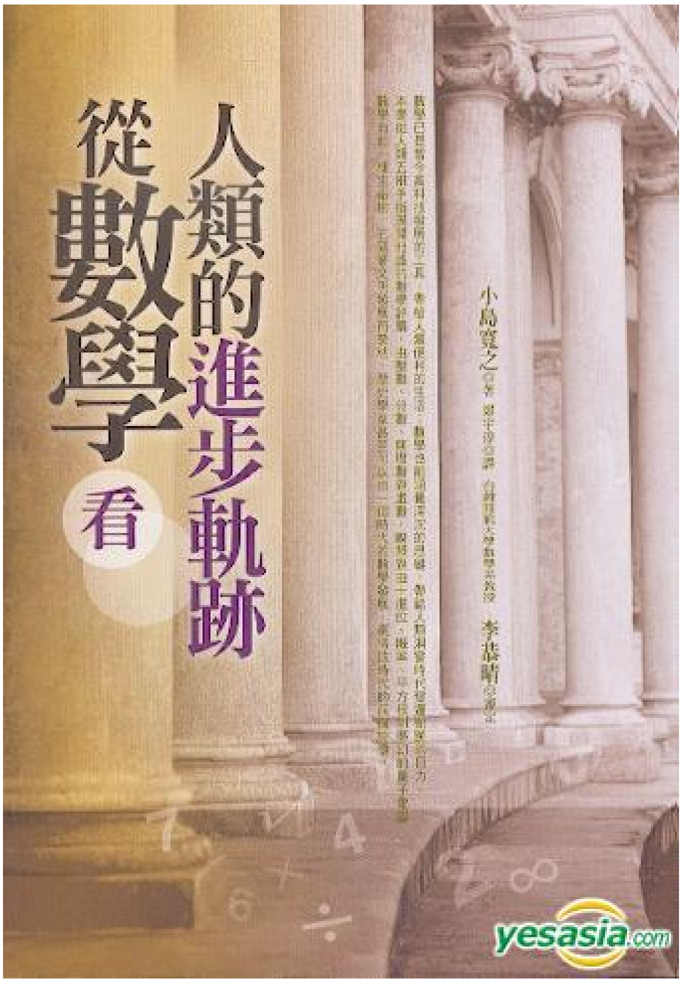
譯者：鄭宇淳

審定：李恭晴

出版社：世茂出版集團

出版日期：2007 年 1 月

ISBN：957-776-825-3



前言

數學這門科目，對於許多人於求學時代來說，是一門令人頭痛科目。例如，令人頭痛的三角函數，圓錐曲線等…，是怎麼也學不會的。其實數學一點也不可怕，也沒有很難懂，更不是一點用處也沒有的學科。相反的，數學是能讓我們對於我們所生存的這個世界更加了解的一項有利的工具。本書一邊解說科學的進步和最尖端的技術，一邊述說著數的演進史。因為，數的故事也是這個世界的故事。

內容簡介

第一章：從人類五根手指開始壯盛的詩篇

基於人類兩隻手加起來共有十隻手指頭，所以用十進位來計算時，是很自然也很方便的。但人們卻也被自己發明的十進位法所束縛住，台股指數『差點破萬點』是個最好的例子，當股票漲到快一萬點的時候，就很難再漲了。之所以會有這個現象，乃因多數股民都會注意一萬這個指標性數字，因此不知不覺以十進位制的數字當作買賣考量。那如果是外星人算算數呢？導演史蒂芬史匹柏拍攝的 E.T.電影，裡面的外星人兩手各有八根手指，所以很自然的我們會猜測，外星人是使用八進位制。若用他八根手指頭計算地球一年有幾天的話，結果竟然巧合地是$555_{(8)}$。

眾多的進位制中，以二進位最特殊。二進位之所以方便，是因為只要記住以下的運算就夠了：

$$0_{(2)}+0_{(2)}=0_{(2)}，0_{(2)}+1_{(2)}=1_{(2)}，1_{(2)}+0_{(2)}=1_{(2)}，1_{(2)}+1_{(2)}=10_{(2)}$$
$$0_{(2)}\times 0_{(2)}=0_{(2)}，0_{(2)}\times 1_{(2)}=0_{(2)}，1_{(2)}\times 0_{(2)}=0_{(2)}，1_{(2)}\times 1_{(2)}=1_{(2)}$$

這種二進位的簡便性成了電腦的計算方式。發明者諾曼的計算機器—電腦在二戰之後極速進化，成了現代不可或缺的工具。若當時電腦沒被發明，就不會有日本原子彈的悲劇，更不會有資訊化的發展。

質數，是數字中的寶石。乃因為質數沒有完整的規則可循。曾經有兩個數學家，分別提出下列兩種質數公式，雖然後來都以失敗告終，但卻各自有不同的貢獻。第一個$\boxed{2^{2^n}+1}$：此數是由費馬提出的，後來被尤拉計算出$n=5$時，為$4,294,967,297=641\times 6,700,417$。然而在十九世紀時，高斯發現，僅用尺規能畫出的正$n$邊形，若$n$是質數的話，則必為費馬數，這也許是費馬意想不到的

貢獻吧。另一個$\boxed{2^n-1}$，其中 n 是質數，是梅森研究反覆單位數發現的，而目前發現最大的質數就是梅森質數之一，雖然不是每一個梅森數都是質數，但用來檢驗是否為質數時，可以用簡便的「演算法」來檢驗。那麼大的質數有何功用呢？對於如今網路使用的 RSA 編碼，有著莫大的功用。

第二章：從分數開始，與不確定性奮戰

分數（有理數）早在埃及時代寫成的書中就有提及，希臘文明也把分數以「比」的表現方式來進行研究。而分數乘法運算，是自然的分母乘分母，分子乘分子，但加法運算卻很不自然，也是最煩人的地方。「比」的研究，也輾轉促進歐幾里德計算法（輾轉相除法）這個偉大的發現，用相除法求最大公因數。

人類很早以前就了解到：人世間充滿了不確定性。古代的人們並未發現「這種不確定性也有數學法則」的事實，到了十六至十七世紀才被發現。當時流行用骰子賭博，於是，機率的研究就此開始。

我們在計算丟三個骰子時，每一種點數的機率時，即使擲出的骰子點數相同，但因為基本上就是由不同物質所構成的，所以，如果不區分就會在解讀錯誤。但這個世界上存不存在「兩個完全相同的東西」呢？事實上，在微觀世界中，每一個東西都是相同的，不像巨觀中要考慮兩樣不同的東西會有不同可能，只需要考慮到排列組合數就好，這是量子世界中奇妙的地方之一。

當我們碰到有不確定性的情況時，總會先想大概的原因。像這樣我們去假定我們碰到的現象背後的原因有多個時，就會想去推測哪個才是真正的原因。進而貝氏反機率的出現。試想，有一對夫妻，連生了 5 個女兒，那第 6 胎男生的機率還是 1/2 嗎？還是要做些修正呢？

第三章：從無理數開始，進入絢爛的現實世界

無法以分數表示的數就稱為「無理數」。發現無理數的人是畢達哥拉斯。隨著平方根的發現，進而存在一種有名的**黃金比例**，因為這是世界上最美的數字，而這個數字 x，滿足$1:x=x:x-1$，即$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，換算成小數即 0.618033988。一個長方形若對折後類似於原來的長方形，是比較好的設計，像我們用的 A3 ，A4 或 B3 ，B4 系列長寬比都是$\sqrt{2}:1$。

十八世紀的數學家流行研究「平方數的倒數和如果累加之後會變成多少」

這個問題。$\zeta(Zeta)=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=1.64493406684822643647=\frac{\pi^2}{6}$，是尤拉在一七五三年的偉大發現，後來提出了完整的公式：$\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots$，變成一個函數來研究了，稱之為 Zeta 函數。不久，尤拉發現了 Z 函數歷史性的公式：$\zeta(s)=\frac{1}{(1-1/2^s)(1-1/3^s)(1-1/5^s)(1-1/7^s)\cdots}$，右式中出現了全部的質數。隨著 Zeta 函數的研究不斷累積，在二十世紀末，終於打倒了「費馬大定理」。

自從牛頓發現「運動方程式」，只要知道宇宙大爆炸時之初始數值，只要透過解力學中的微分方程式，就可計算出我們未來的命運，而混沌理論打破了這個神話。混沌理論說只要在過去的數值有些微差距，會導致未來的巨大變化。初期值的差異，即使只有十億分之一，仍能導致未來的巨大的變化。而混沌理論，是由無理數掌控的，這個數用二進位表示會比較好，而排列方法是 00 01 10 11 再來是 000 001 010 011 100 101 111 等由小到大的方式排列。即

$\gamma=0.01\,00011011\,000001010011100101110111\cdots_{(2)}$

第四章：從虛數開始，進入不可思議的微觀世界

虛數最重要的目擊者，是在發現三次方程式解法的那段時期。隨著研究三次方程式的解法，數學家再也無法避免去面對虛數了。我們已經知道虛數雖然是虛構的，但是卻是不可或缺的虛構。把複數打到平面上，稱之為「複數平面」或「高斯平面」。我們導入和與積之後，就可以明白複數的計算具有圖形般的有趣性質。藉著複數的積是旋轉擴大這點，我們發現了正多邊形和方程式之間的緊密關連。大數學家高斯在十八歲的時候解決了只用尺規做正多邊形的問題，其實就是利用這個性質。高斯厲害的地方在於：他並非留下否定正七邊形解法方式的這個答案。他發現了下一個有可能做圖的質數，那就是正十七邊形。後來高斯的紀念碑上刻的正是正十七邊形的圖案。在三年後，高斯有了名留青史的偉大發現。那就是被後世稱為「代數學基本定理」的一個定理。根據此定理，我們了解到：「n 次方程式在複數的世界中，如果把重複的值也算入的話，必定有 n 個解」這樣的劃時代發現。

至此，「虛數這東西是數學中使用的便利方法，是虛構之物。」但是，進入二十世紀之後，虛數已經不能說是虛構的存在，那是因為，在物理現象中也發現虛數的存在。藉由量子力學，速度是個虛數，長度也是虛數，一顆原子原本穿不過的力量牆，最後還是穿過了，測出的速度竟然是個虛數！

心得

此書以數系的發展，去看人類的進步軌跡，每一種數的發現，都有其背景的，這是以前我想都沒想過的。

第一章裡，最感到有趣的事是「費馬數」與「梅森數」，竟是與 2 進位法有關。它們有著相同的目標，就是要探討質數，事實上從以前國小學到質數，一直到大學數學系四年畢業，我都沒去想過：找質數要幹嘛？書中提到了質數一個很大的應用－RSA 編碼。RSA 編碼擁有誰都可以進行加密但只有一個人可以解讀的非對稱特性，這就是 RSA 編碼的機關所在。

第二章提到機率的概念，以前高中在算機率時，比如說計算丟兩個銅板，一正一反的機率是多少？答案是 1/2，因為這兩個銅板是可以實際去區分的。但最讓人感到驚訝的地方，是發現了「兩個完全相同的東西」(可參見書中 P.072 的實驗)。在微觀的世界中就會發生這種顛覆我們想法的情形。「完全相同的兩個東西」就存在於此，這也是一種名為「量子力學」的物理法則所展示諸多不可思議之一的事物。

第三章中，隨著畢氏定理的發現，進而有了無理數的誕生。而書中提及的混沌現象，正與無理數有著莫大關係。由於這學期有修混沌動態系統，所以對於混沌現象又多了些許的認識，藉由一些實際的例子來看，不難看出，若只稍為改變一下初始值，卻對其後來的結果影響甚大。例如：動態系統最典型的一個函數 *logistic map*： $f(x)=kx(1-x)$ ， $x_{n+1}=kx_n(1-x_n)$ 。

第四章進入了虛數的世界，記得上學期的數學聖殿中，有一場由李恭晴教授（正是此書的審定者）所講授的「複數的概念與應用」中有提及，虛數－虛無縹緲的數，但是複數卻可以代表平面上的向量，而且又具有一般向量所沒有的乘法與除法運算，所以很多和平面向量有關的問題都可以利用複數來處理。

隨著數系的發展，不難同時看出人類的進步。又或者說，人類之所以會進步到如此文明，數學可以說是功不可沒。曾經聽說電腦斷層掃描的原理，用的就是數學中的「傅利葉分析」。數學的應用在我們的生活中可真是無所不在，也多虧有這些，我們如今的生活才會那麼便利及文明。