

# 數學哲學與數學史

「數學哲學」(philosophy of mathematics) 當然與「數學史」(history of mathematics) 有關！它們的關聯受到矚目，大概可以追溯到七十年代。當時數學哲學家 Imre Lakatos 追隨 Karl Popper，開始注意到被邏輯實證論 (logical positivism) 所忽略的「發現的脈絡」(context of discovery) 對知識成長的重要性，遂將數學史結合到數學哲學的研究之中。此外，Lakatos 也十分關心數學教育，他希望數學史融入數學哲學所引出的「擬經驗論」(quasi-empiricism) 觀點，最終可以對數學教育作出貢獻。

首先，且讓我們就「數學哲學」與「數學史」各自的學術目的來討論。為了達到此一目的，學術研究的對象與方法，就會逐漸地形成它們的獨特性，也因而劃定了該學門的邊界。這種「各自為政」的狀態，當然也成就了各自學門的自主性 (autonomy)，從而為各自學門的知識本位 (knowledge status / claim) 訂下了互異的規範。譬如數學與物理學的邊界十分清楚，所以，「數學真理」(mathematical truth) 與「物理真理」(physical truth) 當然不同，而區別它們的方法自然也就容易被凸顯出來了。於是，利用方法論的判準來劃分學門的邊界，就被認為是一種極自然的考慮。譬如說吧，邏輯實證論者，就將非形而上的知識分成經驗的 (empirical) 與形式的 (formal)，前者包括了科學 (自然的與社會的) 與人文學，後者則包括了數學與邏輯。對它們而言，數學與物理學當然不同，因為在「核證的脈絡」(context of justification) 中，前者所使用的方法 -- 依據假設的一種演繹過程，就不同於後者之仰賴觀察、實驗等經驗手段。不過，這種分類法則目前已經受到很大的質疑。在數學的知識活動中，或許它的「發生」(genesis) 過程所蘊含的動態面向與經驗成分，也會影響它的知識本位，職是之故，擬經驗論者如 Lakatos 所開出數學知識之經驗關懷，其中企圖含攝數學知識的演化過程 (亦即數學史之關懷所在)，當然很容易理解了。

然而，照傳統的知識分類來說，歷史與哲學畢竟不同。如何面對哲學本體論問題受到它的歷史演化因素的滲透，比方數學物元 (mathematical entities or objects) 如函數 (function) 的本質，大概是純哲學研究再也無法迴避的問題了。或許這也促成 Lakatos 改寫康德 (I. Kant) 並廣被傳頌的一句話：「數學史一旦缺少了哲學的引導，便是盲目的；至於數學哲學，要是對數學史中最引人遐思的現象不理不睬，那麼，它便是空洞的。」(the history of mathematics, lacking the guidance of philosophy has become *blind*, while the philosophy of mathematics turning its back on the most intriguing phenomena in the history of mathematics, has become *empty*.) (引自 Ernest 1991, pp. 24-25) 基於這種歷史關懷，我們可以對照數學哲學的傳統問題。嚴格來說，它是傳統知識論 (epistemology) 的特例，主要關懷下列問題：數學知識的基礎何在？數學真理的本質為何？又是哪些條件刻劃了數學真理？它們的結論之核證又是什麼？數學真理何以是必然的真理 (necessary truth)？現在，如果要在數學哲學問題討論中為數學史留下一個位置，那麼，問題意識或許可以指向：

- (1) 數學知識：它的本質，核證與發生 (genesis)
- (2) 數學物元或對象：它的本質與起源 (origin)

(3) 數學的應用：它在科學，技術與其他領域中的效用 (effectiveness)

(4) 數學的實際運作 (mathematical practice)：數學家的知識活動，包括現在與過去。

Ernest 利用以上述判準，來映照數學哲學中的學派如邏輯學派，直觀學派，形式學派，柏拉圖主義 (Platonism，代表人物如 Frege)，約定主義 (conventionism，代表人物如 Wittgenstein)，(樸素)經驗論 ("naive" empiricism，如 Mill) 以及擬經驗論，一一檢視它們各自主張及論述的不足。接著，他針對社會建構主義 (social constructivism) 作為一種新的數學哲學之可能性，提出深入的討論，尤其著重相關的主觀知識 (subjective knowledge) 與客觀知識 (objective knowledge) 之反省。最後，Ernest 結合了數學史，數學社會學與數學心理學，提出數學的社會建構主義式之後設理論 (social constructivist meta-theory of mathematics)，來取代傳統的數學哲學。

關於 Ernest (1991) 一書中的相關討論，我們希望將來提供專文討論。在此只想指出，不管是擬經驗論也好，社會建構主義也好，乃至於數學的社會建構式之後設理論，都十分強調數學知識的經驗成分，也因此，數學史對這些新的數學哲學主張之論述，乃成為不可或缺。

數學知識活動固然有哲學問題，當然也有歷史問題，它貫穿了知識演化的縱軸。這也就是說，歷史一定跟時間有關，它用一個時間的維度，將這些知識活動填進去。從傳統的知識論觀點來看，數學知識是永恆不變 (eternal or timeless) 的東西，它在宇宙誕生時也就被創造好擺在那兒，然後就等著我們去發現。因此，如果歷史知識是關於變化 (change) 的一種學問，那麼，數學史所為何事，就很值得我們推敲了，因為數學知識要是與時間無關，那麼，它的本質自然就沒有歷史問題了。如此一來，數學史的研究，比如研究函數的歷史，首要任務無非是確立函數的定義 (definition)，以便說服我們自己『它』的確貼近函數 (概念) 的本質，然後，以此種終極關懷為唯一目的，歷史上凡是朝此一方向前進的數學研究成果，就都是函數史 (the history of function) 的恰當內容。於是，數學史就變成揭示造物主偉大 -- 因為祂創造了偉大的數學 -- 的一項神聖『理性重建』 (rational reconstruction) 工程了。從而，數學史研究就淪落成爲數學大師造廟的一種學術活動，主要任務莫非是爲那些大師的經典作註腳。

當然，從這樣的觀點來看，數學史的研究也算是對數學知識活動的一種意義賦予 (sense making)。不過，在這種情況下，「數學」與「數學史」這兩者的知識活動好像沒有太大的差別，它們都是目的論式的揭示 (teleological revelation)，亦即它們都亦步亦趨地走向造物主所規劃好的最後真理之途徑上。數學史家想要從這樣的先天設限中解放出來，必須面對柏拉圖 (Plato) 對數學所做的先天設限，然後在學習如何去問恰當的歷史問題。

根據柏拉圖的看法，數學知識是存在於理想世界 (ideal world) 的一些「形式」 (form) 或「理念」 (idea)，譬如三角形就是一個形式，它在吾人的肉體所生存的物質世界 (material world) 是沒有指涉物或參考物 (referent) 的，亦即一塊三角形狀的餅乾並不是『三角形』所指涉的物質 (referred matter)。基於此一假設，學習當然是一個「再發現」 (re-discovery) 的過程。說得更明確一點，柏拉圖認爲吾人生而有知，學習是一

個吾人的靈魂 (soul) 喚醒或收集 (recollect) 本有記憶 (memory) 的過程。柏拉圖曾安排蘇格拉底 (Socrates) 與米諾 (Meno) 家一位奴隸男孩的對話，以「求作一個正方形使其面積是已知正方形面積的兩倍」為例，說明未受過教育的男孩可不學而能，至於教師 (蘇格拉底) 的角色，則只是引導或啟發而已。在此一脈絡中，柏拉圖顯然呼應了蘇格拉底的產婆式教學法，產婆 (比喻教師) 只是協助產婦 (比喻學生) 生出嬰兒 (知識)，她並不是知識的傳送者。

不過，如何喚醒孩童本有的知識，柏拉圖並沒有提供可行的方法。誠然，數學的訓練，無非是協助吾人擺脫物質世界的糾纏，而將靈魂或心靈 (mind) (對柏拉圖而言，這兩個名詞通用) 提升到理想世界，去把握永恆不變的形式或理念。然而，如何達到此一目的，柏拉圖並沒有提供任何經驗手段。相對地，亞里斯多德就務實多了，他認為吾人經驗可及的一塊三角形餅乾 (亦即「物質」) 內蘊了三角形的「形式」，因而，吾人心靈通過與三角形餅乾之類的物質之互動，應該有可能領會或理解三角形這一形式或理念的。其實，亞里斯多德也認為三角形這種數學「物元」，是從三角形餅乾這樣的「物質」抽象而來，對於「物元」與「物質」兩者的關係，他尤其說得極為明白：「當我們考慮數學物元時，我們是將它們看成好像與其物質分離，雖然事實上並非如此。」

上述亞里斯多德的數學認識論，建立在他的本體論假設上。他認為數學知識是介於形上學 (meta-physics) [或第一原理 (the first principles) 與物質世界 (或物理世界，physical world) 之間的橋樑，換句話說，數學溝通了柏拉圖的形式與物質。儘管亞里斯多德將數學的本體論地位 (ontological status) 紆尊降貴了下來，但是數學因而可與吾人經驗結合，也為凡夫俗子可以學習數學打通一條途徑。從這個觀點來看，歐幾里得在【幾何原本】第一冊中為「直線」定義 (Definition 4) 提供工匠經驗的比喻，意在模仿亞里斯多德的認知方法，殆無疑問。迥異於柏拉圖，亞里斯多德重視物理世界及其蘊含的數學知識，大大地強調了數學知識的經驗成分，同時也暗示我們在教育的過程中，學習者主體以經驗手段接觸客體，從而對客體所蘊藏的數學物元有所發明。換言之，對亞里斯多德而言，學習比較像是一個再發明 (re-inventing) 的過程。這是古希臘數學哲學對於現代數學教育最有貢獻的一個主張，值得我們深入研究。

從上述柏拉圖與亞里斯多德的對比，可見數學哲學的立場，不只影響數學知識的認知方式，同時此一立場對經驗知識的重視程度，也決定了知識活動的歷史面向之可能性。由此看來，亞里斯多德的觀點，為數學史與數學哲學的結合，預留了比較大的空間。所以，我們必須注意：並不是所有的數學哲學立場都為數學史留下位置！如果一味地認為數學概念是一種『先驗的』(先於經驗, *a priori*) 柏拉圖形式 (Platonic form)，那麼，不只是數學史的研究走不出為數學大師作註腳的窠臼，數學史與數學哲學因結合而互惠的期待，也會完全落空！尤其是今日主導數學史學的社會史取向 (socio-historical approach)，由於浸潤了數學與社會互動的豐富面貌，也會跟那種狹隘的數學哲學論述，絲毫沒有任何交集。

儘管如此，數學哲學與數學史畢竟是彼此獨立的學門 (discipline)，它們各自擁有亟待完成的學術目標。而且，它們各自研究成果之深化，也一定會對數學教育研究，帶來深遠的影響與助益。我們固然不能期待數學哲學家對數學史一定深情款款，同理，也

不能要求數學史家必須懷抱普適的的哲學思考。如果，數學教育研究者與工作者在選擇了適當的哲學立場之後，發現數學哲學與數學史的結合，是必須優先面對的問題時，那麼，除了親自『下海』去研讀這兩門學問的基本知識之外，大概就別無他途了。

## 參考文獻

Brown, Harold (1977). *Perception, Theory and Commitment: The New Philosophy of Science*. Precedent Publishing, Inc.

Ernest, Paul (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London: The Falmer Press.

Heath Thomas (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. New York: Dover Publishing Co.

Heath, Thomas (1980). *Mathematics in Aristotle*. New York & London: Carland Publishing, INC.

Hempel, Carl (1966). *Philosophy of Science*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Maziarz, Edward A., Thomas Greenwood (1968). *Greek Mathematical Philosophy*. New York: Frederick Ungar Publishing Co.

Tymoczko, Thomas ed. (1986). *New Directions in the Philosophy of Mathematics: An Anthology*. Boston: Birkhauser, Inc.