評《高中數學》的『邏輯概念』內容

一、前言

邏輯相對於數學知識本身來說，是屬於後設層次 **(meta-level)** 的一門學問。我們將它納入高中課程單元，顯然是高中學生有能力作嚴格論證之後，我們還期待他（她）們可以進行『方法論層次』**(methodological level)** 的反思。這種期待或許也呼應一些來自教育現場的觀察，那就是高中教師發現：絕大部分學生無法體會譬如『數學歸納法』**(mathematical induction)** 與『歸謬法』**(reduction to absurdity, *reduction ad absurdum*)** 等方法論的本質。因此，在高一上學期安排『邏輯概念』這個單元（內容不外乎是命題、論證或證明）的目的，無非是讓高中學生對於『數學方法論』中涉及證明的反思，有一點起碼的理解，從而有助於她（他）們進行嚴密的論證 **(argumentation)** 思考。

不過，由於初升高一的學生對於數學所知相當有限，同時，他（她）們也沒有太多學習如何有效操作證明的經驗，[1]因此，除了極少數的數學精英之外，一般學生大概都很難在學習數學證明時，監控 **(monitor)** 自己的論證過程。

如果這樣的推斷不太離譜的話，那麼，高一上學期絕對不是學習邏輯的最佳時機。我們認爲一個學習階段（譬如：整個高中學程）即將結束，才適合引領學生進行後設反思。到了高三下，教師如有機會幫助他（她）們統整初等數學知識，那麼，他（她）們的數學素養理應可以更上層樓。此時，由於他（她）們的學習經驗豐富，擁有很多垂手可得的數學實例，還有，數學素養也比較成熟，『邏輯』單元或許就不再是教師與學生的夢魘了。

其實，純就知識內容而論，此一『邏輯』單元也有值得商榷之處。筆者撰寫本文，就是指出各種現行高中數學各個版本的可能疏漏與不足，希望將來再版時，它們有機會做適當的修訂，以便給予高中學生更清晰可讀的邏輯單元知識。爲此，本文第二節介紹這些教科書版本。爲了評論它們，筆者先在第三節簡介西方邏輯發展的歷史。然後，在第四節中說明命題與論證的意義。在第五節引述各個版本教科書邏輯單元的內容，以作爲第六節評論的依據。

二、高中數學教科書一綱多本

本文所稱『高中數學』教材，是指編者根據教育部於民國八十四年十月十九日頒佈的『高級中學數學課程標準』編輯而成的教科書。在此，筆者將根據下列六套教材提出評論。它們的出版資料與其各自的『邏輯』單元所佔篇幅，先在本節介紹。至於『邏輯』內容，則將留到下文第五節再說。

(1) 楊維哲、蔡聰明、吳隆盛編著的『三民版』（由三民書局發行）。本書第 **1** 章有三節（各約有 **10** 頁），分別是 **1-1**『簡單的邏輯概念』（佔 **10** 頁）、**1-2**『集合的基本概念』（佔 **12** 頁）以及 **1-3**『函數的基本概念』（佔 **8** 頁）。這 **1-1** 節又細分成爲七個小節，

[1] 有很多學者認爲他們『當年』的學習經驗並非如此！誠然。不過，請不要忘記：『當年』只有百分之三十的國中畢業生可以進入普通高中就讀，而且大部分是私立高中。

依序分別是：淺談敘述、敘述的真偽、敘述與命題、命題的真偽與證明、命題的轉換、歸謬法，以及命題與條件。

(2) 柳賢、左太政、葉永南、黃必群、謝哲仁、毛延宗、黃重嘉編著的『翰林版』（由翰林出版事業公司出版）。本書第 **1** 章分成三節，分別是 **1-1**『簡單的邏輯概念』（佔 **10** 頁）、**1-2**『集合的基本概念』（佔 **13** 頁）以及 **1-3**『函數的基本概念』（佔 **8** 頁）。其中第 **1-1** 節又細分成下列四個小節呈現：敘述、命題、充分與必要條件、以及反證法。

(3) 李虎雄、陳昭地、黃登源、李政貴、林礽堂、儲啓政編著的『康熙版』（由康熙圖書公司經銷）。類似『三民版』，本書第 **1** 章也有三節，分別是 **1-1**『簡單的邏輯概念』（佔 **12** 頁）、**1-2**『集合的基本概念』（佔 **9** 頁）以及 **1-3**『函數的基本概念』（佔 **6** 頁）。第 **1-1** 節又細分成下列兩小節『命題』與『證明』呈現。至於其學習目標，則是「認識基本的邏輯用詞，如充分條件、必要條件；瞭解證明的意義及反證法的證明模式。」

(4) 余文卿、翁錫五、李善文、丁村成編著，李白飛、康明昌審訂的『龍騰版』（由龍騰文化公司編印）。本書第 **1** 章分成四節，分別是 **1-1**『邏輯的基本概念』（佔 **11** 頁）、**1-2**『集合』（佔 **16** 頁）、**1-3**『集合的運算』（佔 **7** 頁）以及 **1-4**『函數』（佔 **10** 頁）。第 **1-1** 節又分成四小節：充分條件與必要條件、必要條件、或與且、歸謬證法與反證法。

(5) 林福來、李恭晴、徐正梅、陳冒海、陳順宇編著的『南一版』（由南一書局出版發行）。本書第 **1** 章有三節，與前幾套版本不同之處，在於它將集合、邏輯單元對調，因此，其順序爲 **1-1**『集合的基本概念』（佔 **14** 頁），**1-2**『簡單的邏輯概念』（佔 **10** 頁），**1-3**『函數的基本概念』（佔 **16** 頁）。至於第 **1-2** 節則再細分成『若…，則…』、『且與或的用法』、『充分條件與必要條件』以及『反證法』等四小節。

(6) 吳森原、許乃紅編著的『正中版』（由正中書局出版發行）。本書第一章有三節，依序是 **1-1**『簡單的邏輯概念』（佔 **11** 頁）、**1-2**『集合的基本概念』（佔 **14** 頁），以及 **1-3**『函數的基本概念』（佔 **9** 頁）。其中第 **1-1** 節又細分成三個小節：幾何中的推理、充分條件、必要條件與充要條件，以及反證法。

其實，上述這些版本在邏輯概念這一節的內容大同小異，我們將在下文第五節各自引述一些材料，以便作爲評論的依據。不過，我們必須在此先指出：只有『龍騰版』澄清了『歸謬法』與『反證法』之關係。無論這兩者的名稱與指涉爲何，我們呼籲各版教科書再版時，務必統一才好。

三、三段論法、命題邏輯與與關係邏輯

本節一開始，我們將根據數學史家 **Morris Kline** 的說明，說明西方邏輯的演進，[2]以便用以評論高中數學課程的邏輯單元之參考依據。其次，我們再針對命題與論證的意義，提供一些與這一單元相關的內容說明。

在希臘數學史上，亞里斯多德被認爲是系統化研究邏輯的鼻祖。一般人很容易對他的三段論法琅琅上口，而忽略了他的邏輯與今日的不同。簡單地說，他的邏輯主要處理與 **"to be"** 動詞連結的關係 **(relation)**。譬如說吧，他的典型三段論法 **(syllogism)** 例子如下：

[2] 參考 Kline (1980), pp. 180-190。

大前提：凡人都會死（**All men are mortal**）；

小前提：蘇格拉底是人(**Socrates is a man**)；

結論：蘇格拉底會死 (**Socrates is mortal**)。

此外，他當然也討論了諸如『矛盾律』(**the law of contradiction**) 與『排中律』(**the law of excluded middle**) 等邏輯推論的基本原理。這種三段論法中所涉及的大、小前提與結論等語句 (**sentence**) 都是命題 (**proposition**)，所以，亞氏邏輯也被歸屬爲『命題邏輯』(**propositional logic**) 中的一種。

這種命題邏輯是英國數學家布爾 (**George Boole, 1815-1864**) 所引進。其實，他也將代數符號運算引進邏輯推論，爲邏輯的形式化奠定了基礎。譬如說，他以 **x** 代表狗所成的類 (**class**)，以 **1** 代表所有的物體，則 **1-x** 代表非狗的物體。如此一來，下列方程式『**x+(1-x)=1**』，就可以解讀成爲『每一個物體不是狗就是非狗』了。同時，將此一符號『翻譯』引入命題之中，如果令 **p** 代表『約翰是男子』爲真，那麼，**-p** 或 **1-p** 就代表『約翰是男子』爲僞。於是，『命題演算』(**propositional calculus**) 當然就可行了。[3]

另一方面，針對亞氏邏輯，英國數學家狄摩根 (**Augustus De Morgan, 1806-1871**) 也指出：如何從『馬是一種動物』(**A horse is an animal**) 推論出『馬頭是一種動物的頭』(**A horse's head is an animal's head**)，三段論法是無能爲力的。其實，在這個例子中，我們還需要一個前提，那就是：『凡動物都有頭』。事實上，如利用布爾的符號法則，社設 **x** 代表馬所成的集合，**y** 代表有頭的動物之集合，並且令 **xy** 代表同時在前述兩集合中的物體之集合（亦即前述兩集合之交集），則因爲 **xy** 是 **y** 的一部份，所以，可以推論出：馬頭是一種動物的頭。

顯然，爲了做這種推論，我們需要『一般關係的邏輯』(**logic of general relations**)。上述那些純粹建立在 **"to be"** 動詞的關係上之命題推論是不夠的。譬如下列推論當然無效：

約翰是兄或弟 (**John is a brother**，亦即有兄弟)；

彼得是兄或弟 (**Peter is a brother**)；

故：約翰與彼得彼此是兄弟 (**Hence John and Peter are brothers (each other)**)。

又如下列推論：

蘋果是酸的 (**An apple is sour**)；

酸是一種味道 (**Sour is a taste**)；

故：蘋果是一種味道 (**Hence an apple is a taste**)。

當然也很荒謬。

上述這兩種無效推論，乃是對於『述詞』(或『謂詞』) (**predicate**) 所指定的關係之誤用。事實上，在上述這些命題中，述詞所說的的不外乎是：『主詞是述詞所指定的集合內的一個元素 』(**the subject is included in a class specified by the predicate**)。這種『主詞』－ **"to be"** 動詞－『述詞』的關係，當然無法涵蓋下列命題：『**2** 小於 **3 (2 is less**

[3] 舉例說吧，我們可以將一個有效的三段論式如『所有的 X 都是 Y，而且所有的 Y 都是 Z，因此，所有的 X 都是 Z』，改寫成布爾的代數演算：令 XY 表示 X 與 Y 的『交集』(這現代的名詞，不過，與布爾意思相符)，則因 X(1-Y)=0，故 X=XY。同理，Y=YZ。所以，X=XY=X(YZ)=(XY)Z=XZ，正是三段論式的結論。參考 Davis (2000)，pp. 21-40。

than 3)』；或『Q 點介於 P 與 R 之間』(Point Q is between P and R)。

另一方面，正如朱水林所指出：『命題邏輯把簡單命題作爲整體考察，不把它們再分析爲詞項。這樣，有的推理形式不能在命題邏輯中加以表述反映，顯示了極大的侷限性。』[4]他的『三段論法』例子是：

所有的科學定律是不以人們意志爲轉移的，

邏輯學的規律是科學定律，

所以，邏輯學的規律是科學定律。[5]

可是，如果我們利用命題邏輯做工作來處理這個三段論推理，則無法證明它是一個套套邏輯（**tautology**），這是因爲上述的推論形式可以改寫成：『（**p** 且 **q**）⇒ **r**』（其中 **p, q** 與 **r** 分別代表上述三個命題）。

面對這種不足，美國哲學家裴士(**Charles Sanders Peirce, 1841-1902**) 率先指出『關係邏輯』(**logic of relations**) 的重要性。他特別強調『命題函數』(**propositional function**) 的重要性，將函數的變元 (**variable**) 概念引進命題之中，因此，「約翰是男人」(**John is a man**) 是一個命題，至於「**x** 是男人」(**x is a man**) 則是一個命題函數，其中 **x** 是一個變元。有了變元，皮爾斯進一步引進『量詞』(**quantifier**) 的概念，以便消解如下兩句的含混：

一位美國人領導了獨立戰爭 (**An American led the War of Independence**)。

一位美國人信仰民主 (**An American believes in democracy**)。

顯然，前一句中的『一位』美國人專指喬治華盛頓，後一句的『一位』則指『每一位』(**every**)。也就是說，前一句的『一位』是指『存在有一位』(**there exists an America**)，而後一句的『一位』則是指『所有的』(**for all**)。事實上，這也是我們現在所熟悉的『存在有一個…』、『對於所有的…』等句子的來源。

十九世紀邏輯理論的發展，由德國數學家弗列格 (**Gottlob Frege, 1848-1925**) 做了集大成的工作。他接收了命題邏輯、涉及關係的命題、命題函數以及量詞的理念，然後，據以完成他自己的很多貢獻。他區別了一個命題的單純敘述句 (**mere statement of a proposition**) 及其爲真的斷言 (**assertion that is true**)。[6]還有，他也分辨了一個物體譬如 **x** 及其所成的集合 {**x**}，以及集合之間的包含關係。此外，他也將『實質蘊涵』(**material implication**) 形式化，亦即他在語句『蘊涵』之外，還允許“$p \Rightarrow q$”中的 p 與 q 是任意可能的命題，其中它們可以完全沒有因果關係、或任何其他的關係。在這種情況下，我們固然可以保持下列有效推論：如果 p 爲真，而且 $p \Rightarrow q$，則 q 亦爲真。然而，卻也可以允許：如果 p 爲假時，則蘊涵式 $p \Rightarrow q$ 恆爲真。只有在 **q** 爲假時，蘊涵式 $p \Rightarrow q$ 才爲假。[7]

---

4 引朱水林 (1997)，頁 67。

5 同上。

6 在這種情況下，條件句的真假與（比如說數學上）邏輯連結當然比較容易凸顯了。請參閱下一節的進一步說明。

7 弗列格的貢獻之一，是將『所有馬都是脯乳類動物』改寫成『對每一個 x，若 x 是一匹馬的話，則 x 是脯乳類動物』，或將『某些馬是純種馬』改寫成『存在有一個 x，x 是一匹馬且是純種』等等。這種在『述詞』中加入『量詞』的考量，然後，把所有的命題，都改寫成以『若…，則…』，『且』，『或』，以及『否定』等連詞連結的語句（或敘述句或命題），就是弗列格的不朽貢獻。

以上主要由這些數學家或哲學家所完成的邏輯系統，包含了命題函數、像『**x** 愛 **y**』或『**A** 介於 **B** 與 **C** 之間』這樣的關係式，以及量詞等，現在被稱之為『一階的述詞（或謂詞）演算』**(the first order predicate calculus)** 或『一階邏輯』**(first order logic)**。總之，誠如朱水林教授所刻劃，這種邏輯的內容如下：「對簡單命題加以分析，分別其主詞和謂詞（按即述詞），考慮量詞的全稱和存在，區分一般與個別，總結出它們的形式結構，然後研究這些形式邏輯的邏輯性質，以及形式結構間的邏輯關係，從而導出相應的邏輯規律，這就構成謂詞邏輯（按即述詞邏輯）的研究內容。謂詞邏輯中的命題形式，推理形式和量詞的特徵密切相聯，因此，它又稱為量詞邏輯。」[8]

這樣的邏輯體系對於數學知識而言，已經綽綽有餘了。緊接著，我們將針對命題與論證提供一些必要的說明。

四、命題與論證

所謂『命題』**(proposition)**，在邏輯上亦稱作『敘述句』**(statement)**，它是一種敘述事態的『語句』**(sentence)**。敘述句所陳述的內容如與事實相符，則該敘述句為真**(true)**；否則即為假 **(false)**。這一個有關『真理』的概念，可以逆推回到古希臘哲學家亞裡斯多德。根據他的觀點，如果一個命題所斷言的敘述符合事實，則此一命題為真 **(A proposition is true if the statement asserted by it corresponds to a fact)**。譬如說吧，「如果雪是白色的，那麼，『雪是白色的』（這個敘述句）為真」**("Snow is white" is true if snow is white)**，應該足以說明所謂的『真假』是怎麼一回事。[9]

然則這種涉及真假的『命題』或『敘述句』何以關聯到邏輯論證呢？根據林正弘教授的看法，由於「任何事實都可用語句來敘述，因此我們要別人相信某一件事實，亦即要他相信敘述該事實的語句是真的 **(true)**。例如：我們要朋友相信明天會下雨，亦即要他相信『明天會下雨』這句話是真的。如果他不相信這句話為真，我們必須提出證據或理由，而證據或理由也可以用語句來敘述。」[10]換句話說，為了要說服別人某命題甲為真，我們通常會尋找另一個對方相信為真的命題乙當作證據或前提，然後用來支持或導出此一甲命題。至於如何以及為何支持或導出，那就涉及說話技術（『修辭』）或推論形式了。一般人評論某人說話不合邏輯時，通常是我們不能接受他（她）的結論為真。不幸地是，某人所提出來的前提與結論都是真的，但是推論無效，卻很少被人批評，除非他（她）是處在數學的教學活動之中。

在數學上，所謂的『命題』或『敘述句』，是指像下列的『幾何事實』：

一個三角形的內角和（是）等於兩個直角的和 (The sum of the angles of a triangle is equal to the sum of two right angles)。

或是像下列的『算術事實』：

2（是）小於 3 (2 is less than 3)。

上述這兩個語句的『是』（**"to be"** 動詞）在中文中經常被省略，因此，它們共通的文法

參考 Davis (2000), pp. 41-58。

[8] 引朱水林 (1997)，頁 67。

[9] 參考 Gellert, W. *et al* eds. (1977), pp. 332-342.

[10] 林正弘 (1999)，頁 1。

結構 ─ 主詞加上述詞 ─ 看來很容易被忽略。當我們針對第一個命題的事實進行驗證時，可以將一個紙上三角形的三個角剪下來，然後拼成一個平角（等於兩個直角的和）。如此一來，『眼見爲真！』然而，如果我們不滿意這種『實驗幾何』的方法，那麼，利用『論證』來進行說服自己與別人，就變得不可或缺了。

在數學上，『論證』通常意指『證明』，在此脈絡中，我們通常會被要求以有效的論證 (valid argument)，從『前提』演繹出『結論』來，譬如：「試證若一個三角形之兩邊相等，則它們的對角也相等」。或者爲某一命題（『結論』）尋找理由（『前提』）、並說明此一理由可以支持此一命題，譬如：上述的「一個三角形的內角和（是）等於兩個直角的和」或「$\sqrt{2}$ 爲無理數」。因此，一個成功的證明通常是運用了有效的論證，從一個或數個的真的命題（前提），一步一步地導出待證爲真的命題（結論）。總之，證明一個命題（譬如 **1994** 年才證明完成的『費瑪最後定理』）爲真，是數學學習的任務之一。至於邏輯學習的目的，正如上文第三節所述，只是要掌握用以判斷論證有效或無效的方法。當我們在進行數學證明時，我們當然必須運用有效的論證（或推論形式）。然而，一個結論如何從某（些）個前提成功地導出，或是某兩個真命題如何做邏輯連結，則主要必須訴諸數學能力而非邏輯思維。

儘管如此，在數學的教學與學習時，我們還是應該好好地對『數學 **vs.** 邏輯』作一點澄清。在上述的例子中，「一個三角形之兩邊相等」、「一個三角形之兩角相等」以及「$\sqrt{2}$ 爲無理數」都是命題。要決定它們的真假，方法不見得一樣。嚴格說來，由於數學知識的特殊性，所以，前兩個命題能否訴諸經驗手段，亦即運用量尺或量角器，恐怕見仁見智，也因此，它們不被認爲是幾何問題或數學問題。這可以解釋這兩個命題何以在幾何學中，經常被連結成爲「若一個三角形之兩邊相等，則它們的對角也相等」這樣的『條件句』**(conditional)**，或上一節所謂的『實質蘊涵』。如此，基於前一個命題爲真的條件，那麼，我們可以證明後一個命題爲真。這種命題與上引的「一個三角形的內角和（是）等於兩個直角的和」是不一樣的，後者在歐氏幾何學的脈絡中，是一個可以由『平行設準』導出來的真命題，亦即：它是一個歐氏幾何學的事實。類似地，「$\sqrt{2}$ 爲無理數」這個命題所以爲真，乃是它對『$\sqrt{2}$』與『無理數』這兩個數學概念之間，做了一個（邏輯）連結。如何提供（數學）證明呢，當然是爲這個連結尋找一個『有效的』論證。如何確定論證『有效』呢？這就是邏輯問題了。

無論如何，數學證明都是在命題或概念之間建立一種邏輯的連結關係，這種關係一旦建立，就表示我們已經證明了一個命題爲真。如此說來，「若一個三角形之兩邊相等，則它們的對角也相等」這種條件句當然也是一種命題了。說得比較精確一點，它是將兩個『單句』**(atomic statement)** 利用『若…，則…』連起來的『複句』**(compound statement)**。顯然，這裡利用了『若…，則…』這種『語句連詞』**(sentential connective)**，它所連起來的句子，也就是前述的『條件句』。由於條件句斷定一事物情況是另一事物情況條件的判斷，因此，一個條件句的真假，只取決於該判斷的前件和後件的的條件關係，是否確實地反映了事物情況之間的條件關係，並不要求前件 **(antecedent)**、後件 **(consequent)** 本身都真。[11]譬如說吧：

[11] 朱水林 (1997)，頁 25。

1. 假如語言能夠生產物質資料，那麼，誇大其談的人就成爲世界上最富有的人了。

2. 假如鬍子長就是學識淵博，那麼，山羊也能講課了。

「儘管這兩個假言判斷（或條件句）的前件、後件都是假的，但是，由於前件確實可以看作是後件的存在條件，所以這兩個假言判斷可以看成是真的。」[12]如此看來，上述「若一個三角形之兩邊相等，則它們的對角也相等」這種條件句，當然也是一個真命題或真判斷了，這是因爲經由我們的幾何證明，前件『一個三角形之兩邊相等』顯然是後件『它們的對角也相等』的存在條件。這一個存在條件，說得精確一點，就是前件是後件的一個『充分條件』**(sufficient condition)**。事實上，在這種情況下，後件也稱作前件的『必要條件』**(necessary condition)**。當然，如有雙條件句，則它的前件與後件就互為『充要條件』**(necessary and sufficient condition)**了。

其他的語句連詞還有連言『且』**(and)**、選言『或』**(or)** 與『否定』**(negation)**。利用這些連詞，我們也可以從單句形式的命題連出複句形式的命題。至於複句（命題）的真假，當然與單句（命題）的真假息息相關，同時，它也被語句連詞所決定。這應該是『真值表』值得引進教材的主要理由之一了。然而，誠如林正弘所指出：「真值表只有在論證的前提與結論都已列出之後，才能用來判斷這個論證是有效或無效；當論證尚未構成之前，真值表並不能告訴我們如何從前提導出結論。」[13]譬如「$\sqrt{2}$ 爲無理數」的證明中，所謂的『前提』是甚麼就非常隱晦，以是『真值表』很難說明『歸謬法』的邏輯等價方法，這是我們在引進『歸謬法』時必須特別注意的一個面向。[14]因此，我們還是需要一些『推論規則』，依據它們，我們從前提一步一步地導出結論來。這些是邏輯學的專門內容，由於數學推論不需要那麼複雜的邏輯知識，因此此處就不多說了。有興趣的讀者，何妨參看任何一本邏輯專書。

五、高中數學教科書的『邏輯概念』內容

現在，針對命題與證明的相關概念，請容許我們引述高中數學教材各版本中的相關論述。依序是『三民版』、『翰林版』、『康熙版』、『龍騰版』、『南一版』以及『正中版』。

（一）『三民版』

1-1.1『淺談敘述』:

在國中的數學課理，我們經常使用到各種『語句』，有的用來描述某一或某些是物的狀態或性質，如「x, y 都是實數」、「n 不是 3 的倍數」……就說話的當時狀況來說，這些語句可能是合乎事實的，我們說它是『真』的；反之，這些語句可能是不合乎事實的，我們說它是『偽』的。……『真』與『偽』二者必有其一且僅有其一，像這種意含真偽性的語句，我們把它稱為一個『敘述』，這些敘述本身都是一個直述句。

在國中數學裡，經常會見到像這樣具有「若 A 則 B」的格式的句子，其中

---

12 同上。

13 林正弘 (1999)，頁 96。

14『歸謬法』運用了邏輯意義相同的『異質位換律』(law of contraposition)，亦即 “$P \Rightarrow Q$” 等價於 “$-Q \Rightarrow -P$”，其中 P 與 Q 都是命題。參考林正弘 (1999)，頁 48。『南一版』將者兩個命題分別稱爲『原命題』與『逆轉命題』。

A與B 都是一個敘述。這樣的語句我們把它叫做一個命題，其中的A稱為這個命題的假設，也可稱為這個命題的前提，其中的B稱為這個命題的結論，也可稱為這個命題的終結。

1-1.4『命題的真偽與證明』:

就命題『若A則B』而言，當假設A成立時，會導致結論B也成立的話，我們就說這個命題為真。當假設A成立時，結論B也許成立也許不成立或者根本不成立，我們就說這個命題不真。

1-1.6『歸謬法』:

假定結論不真，推演出不合於假設的結果，為使命題的假設為真，其結論不得不真。這是一種反證法，叫做歸謬法。

數學上，有某些命題並不容直接證明，而需借助反證法。在用反證法時，因為要先假定結論不成立，而結論不成立的情況如果不只一種時，就要逐一列舉，所以把這種證法叫做窮舉法。

上述引文中的第 一段介紹語句的真偽與敘述，解說淺顯易懂，值得肯定。只是何以引進『直述句』一詞，實在無從理解。在第二段中，『具有「若A則B」的格式的句子』之說訴諸常識並無不可，只是忽略了它與英文中的條件句之連結，而無法協助學生更好地理解邏輯蘊涵，實在非常可惜。此外，假設（前提）與結論（終結）的說法，也可能對學生在了解充要條件時產生困擾。此外，如果敘述與命題兩者之指涉應該相同，那麼，『一個敘述成立』與『一個命題為真』有何不同？再有，本書所謂的『反證法』，不只包括『歸謬法』，也包括了『窮舉法』。

（二）『翰林版』

『敘述』:

在國中我們曾學習『三角形任意兩邊長的和大於第三邊長』、……『x等於多少』等，在數學上這些語句稱為『數學語句』。

能明確判斷真偽的數學語句稱為敘述。

一個敘述如果是對的，稱之為『真敘述』，如果是錯的，稱為「假敘述」。

『命題』:

以『若…，則…』形式表示的敘述稱為命題。『若』後面的數學語句稱為命題的前提，『則』後面的數學語句稱為命題的結論。

『反證法』:

反證法是一種很重要的數學證明方法，一個數學問題使用『直接證明法』不容易證明時，這時可嘗試用反證法來證出。

反證法是一種間接證明法，又稱為『歸謬法』，它不是用直接的方法來證明命題結論的成立，而是先『假設命題結論不成立』，經由這個假設出發，並利用嚴密的邏輯推理，而導出與命題條件或已知定理矛盾的現象。如此可推斷當初『假設命題結論不成立』是不正確的，故得證原命題的結論是正確的。

在上引文的第一段話中，『數學語句』一詞有一點過度限定。第三段應該承第二段而來，然而，編者按敘述是『對』或『錯』以區別敘述的真或假，也在相當程度上訴諸日常語

言，因此，語意上的不夠精確看來是在所難免。此外，在最後一段中，前提與結論之說法，也不如前件與後件之說來得有彈性。此外，命題僅限於『若…，則…』形式表示的敘述，也窄化的命題一詞的內涵。再有，本書將反證法與歸謬法視爲同一種方法。

（三）『康熙版』

甲、命題：

有些物品是木頭材質，有一些則不是。『木頭材質』是物品的一個條件……『可燃燒』也是物品的一個條件，而且一個物品具有『木頭材質』的條件時，必然是『可燃燒』的，也就是「若物品是木頭材質，則物品可燃燒。」

像這樣一句話，也就是形如『若……，則……』的敘述，我們稱之為命題。上面這個命題是對的，但是如果是這樣的命題：「若某人是法官，則某人是男性。」此命題顯然是錯的。

一般而言，當命題「若 p 則 q」正確時，稱 p 是 q 的「充分條件」，也稱 q 是 p 的「必要條件」。

乙、證明：

一個命題是對的或錯的，有時並不明顯，這時就得設法證明了。

一般而言，如果要證明一個命題 $p \Rightarrow q$ 是對的，通常可由前提 p 出發，應用一些已知為對的命題，逐步推導而得出所需要的結論 q。

由前提 p 出發，逐步推得結論 q 的證法，稱直接證法；而假設結論 q 不成立，導出一個矛盾（與前提 p 矛盾，如……），證得 q 非成立不可者，稱為反證法（或歸謬法），它是間接證法的一種。

上述引文中的第一段中，編者稱『命題是對的（或錯的）或正確的』，也相當含混。這是因爲命題「若物品是木頭材質，則物品可燃燒」爲真，乃是由於它的語句或邏輯結構所致。事實上，如果將這一句改成『若黃金是木頭材質，則黃金可燃燒』，則仍爲真。在這種情況下，如果我們無法幫助學生認識『有效邏輯推論』與『命題真假』之區別，那麼，『邏輯概念』這一節或可刪除了。至於『命題』一詞，也像上述版本一樣，內涵過份窄化。再有，本書也將反證法與歸謬法視爲同一種，而且是間接證法中的一種。

（四）『龍騰版』

1. 充分條件與必要條件：

我們先看一個平面幾何的定理：“等腰三角形的兩底角相等”。……像這種可以判斷是否成立的敘述，我們稱為一個命題。

所謂邏輯的推論，其中心概念便是：“一個命題若成立，則當其假設 P 成立時，可推演得知 Q 也跟著成立”。當形如“若 P 則 Q”的命題成立時，P 稱為 Q 的充分條件，Q 稱為 P 的必要條件。

4. 歸謬證法與反證法：

例題五、證明 $\sqrt{2}$ 不能表成分數 q/p，其中 p，q 是整數。

一般而言，當我們想要證明形如“如 P 則 Q”的命題時，我們可以同時假定 P 成立而 Q 不成立，然後逐步推出在這樣的假設下所導致的矛盾，這種證明方法稱為歸謬證法。

一般而言，想要證明“若 P 成立，則 Q 亦成立”時，只要證明“若 Q 不成立，則 P 亦不成立”就行了，這種證明方法稱為反證法。

正如上述版本，本書也窄化了『命題』的意義。同時，所謂的『命題成立』之說，也不符合邏輯用詞。不過，本書編者倒是根據邏輯學，正確地區別了『歸謬證法』與『反證法』。此外，在舉例證明說明 $\sqrt{2}$ 爲無理數的證明之前，先證明例題五，則是非常高明可行的教學策略。如此一來，要說明 $\sqrt{2}$ 爲無理數的證明，應該就比較簡單了。

（五）『南一版』

若…，則…：

在數學的語言裡，一個能判斷“真或偽”的敘述叫做命題。我們常使用“若…，則…”這一類的語句來描述命題。……設 p 與 q 分別代表某一敘述，那麼命題：“若 p，則 q”一般記做 $p \to q$ ，其中 p 叫做前提，q 叫做結論。

命題：“若 p，則 q”，有真、有偽。

一般而言，當“$p \to q$”為正確命題時，我們用符號“$p \Rightarrow q$”表示，讀作 p 蘊涵 q。

如果“兩個角是對頂角”，那麼這“兩個角相等”。這個命題是正確的，也就是說“兩個角是對頂角”這個條件，可以保證結論“兩個角相等”會成立。這時候我們就說：“兩個角是對頂角”是“兩個角相等”的充分條件。

在一般的情況下，如果命題 $p \to q$ 為真（簡記作 $p \Rightarrow q$），那麼 p 就叫做 q 的充分條件。換句話說，要使結論 q 成立，只須具備 p 就足夠了。

在一般的情況下，如果命題 $p \to q$ 為真（簡記作 $p \Rightarrow q$），那麼 q 就叫做 p 的必要條件。即在前提 p 成立的條件下，結論 q 必然會產生。

反證法：

如果一個命題利用直接證法感到無從著手，或是用直接證法後，感到千頭萬緒、困難重重，此時可以考慮另一種證題方法—反證法。

因為原命題與它的逆轉命題必同真或同偽 M，所以“證明 $p \to q$ 和證明 $-q \to -p$ 是同一件事。一般而言，欲證名 $p \to q$ 時，轉而證明 $-q \to -p$ ，就是使用了反證法。

反證法是從“結論的反面”出發，通過一序列正確無誤的推理，最後導致與題設條件、公設、定義、定理、公式、…中的某一種相矛盾，所以得出“結論的反面』不成立，從而肯定“命題的結論”是正確的。

反證法的步驟有跡可尋、條理井然：(1) 反設……(2)歸謬……(3)總結……

如同上述四個版本，本書對於敘述與命題的區別，也顯得多餘。所以，『我們常使用“若…，則…”這一類的語句來描述命題』之說含混，蓋『語句』與『命題』之意義本來就相同故也。同時，在第二段中的命題『有真、有偽』與第三、四段中的命題是『正確的』並不一致。此外，“$p \to q$”與“$p \Rightarrow q$”這兩個符號的引進與區分，看來徒增紛擾，根本沒有實質的必要。不過，本書編者倒是介紹了『原命題』、『逆命題』、『轉命題』以及『逆轉命題』等概念，爲本書的反證法之說明提供了充分的基礎，這在各版本中倒是難得的表現。

（六）『正中版』

1-1. 邏輯是討論思考法則的知識。

學習邏輯的主要目的是在培養我們對日常生活的思考及認知的活動，使觀念、思想和事理更為清楚，推理更為周詳嚴密。

1-1.1 藉由觀察很多相同的事實而得到的結論的推理方法，叫做歸納推理。

先承認一些已知的事實，然後再去推出其他事實的推理方法，叫做演繹推理。

1-1.2 充分條件與必要條件事數學終場常用到的名詞。我們把上面的敘述，改用一般的形式『若 p 則 q』來表示，其中 p 與 q 分別表示敘述。

當敘述若 p 則 q 是正確的，我們稱：p 為 q 的充分條件或 q 為 p 的必要條件。

1-1.3 在數學中，我們經常會遇到『若 p 則 q』的敘述方式，其中 p 叫做假設，q 叫做結論。

如果要證明敘述『若 p 則 q』是正確的，一般的方法是假定 p 是對的，然後依照邏輯推理的方法，逐步推演以得到結論 q；不過，有時候必須採用另一種方法。我們先假定 p 是對的，但是 q 不對，然後逐步推演，最後得到與已知之事實矛盾的結果。這種證明方法，叫做反證法。

本書一開始以『幾何中的推理』引導學生，是一個相當貼心的設計，同時，相對於上述其他版本的編寫來說，也顯得比較親切。然而，本書有關邏輯推論的論述，仍然與前述版本雷同，無法擺脫『常識性』修辭。此外，本書也不曾定義何謂『敘述』。

六、綜合評論

在上一節中，我已經簡單評論了每一版本的『邏輯』單元內容，至於其依據，則參考了本文第四節的一些有關命題與論證的說明。其實，從第四節乃至於第三節的內容來看，邏輯學是一個非常專業且成熟的學門。因此，我們想要擷取它的一些內容（譬如命題與推論形式）來為數學所用，勢必無法迴避其相關專業內涵。同時，從邏輯學的歷史演化來看，它與日常語言的連結，也是數學教學中的一個不可忽視的課題。同時，邏輯的演化也可以解釋：何以我們只需專注於由『若…，則…』等四個語句連詞所連結的命題。

在本節中，我想做一個綜合的評論，看看這一個邏輯單元究竟應如何呈現，才能對整個高中數學的教學有所助益。筆者所以有此想法，完全是因為最近我有比較從容的機會接觸高中數學教師，對於他（她）們教授『邏輯』單元的『感同身受』，真是心有戚戚焉。讀者可參考本文末筆者所附錄的三位數學教師的教學心得與專業的呼籲。綜合她們的意見，『邏輯』這一單元不妨刪除，理由是她們認為：「高一學習邏輯，重點或許應擺在『學會證明』，而非『學會分析證明』。」

既然如此，邏輯這一節如果在課程綱要修訂時一定要保留，那麼，其重點似乎應該擺在直接與證明相關的邏輯概念上，而不宜花太多力氣以說明諸如敘述、命題、充分條件、必要條件等這些評量出題者最喜歡賣弄的題材。事實上，我們從上一節的簡要評論

中，已經可以發現各版本編者編寫此一單元時，運用了相當多『非正式』**(informal)** 的語言或概念，而顯得專業性有所不足，因此，何不在這一節中以複習國中幾何的形式論證部分爲學習目標，[15]而將高中數學課程必須面對的間接證法、反證法或歸謬法，以舉例的方式說明之。我想，無論這樣的內容如何安排，總是必須在『形式或嚴格證明』的需求脈絡中，強調直觀 **(intuition)** 並不完全可靠，還有證明的『說明』**(explanation)** 功能等等，[16]讓高一學生強烈感受到學習的動機才行。

此外，正如上述，我們也必須嚴肅面對邏輯命題所涉及的語句。這在一般邏輯專書中總是佔了很大份量，可惜，本文所論及的這些版本，似乎都不計於此，實在令人遺憾。事實上，這些編者所謂的命題，無非是指利用『若…，則…』這種語句連詞所連結起來的複句，而在英文文法上，它則是一種條件句。因此，既然邏輯離不開文法，推論形式也離不開日常語言，那麼，針對語句的文法做必要的說明，應該有助於邏輯的學習與數學推論（譬如反證法）的釐清吧。

七、結語與建議

既然各版本編者對於邏輯單元的編寫，都不是那麼得心應手，同時，教師與學生對於此一單元都感到相當吃力，還有，高一上學期也不是進行這種後設思考的時機，筆者建議『邏輯』單元移到高一上課程的『附錄』，或者乾脆移到高三下學期。這在一方面，不但減輕教師的教學焦慮（授課時間壓力很大），另一方面，也避免讓高一學生還在適應新的學校生活時，遭遇像邏輯這樣過度抽象的形式理論 **(formal theory)**。不過，無論如何處理，我們都誠懇地希望教材審定者針對修訂再版的教科書，仔細審閱邏輯用詞及其與數學之關聯，必要時，請諮詢邏輯專長的數學家或哲學家，讓教科書的相關內容呈現『專業的』風貌與水準，才不至於貽笑大方。

至於修訂的主要內容，則筆者建議編者務必認真地區分『有效邏輯推論』與『數學命題真假』。在這個脈絡中，數學家與數學教師書寫命題或定理時的習慣用語，譬如『某式子或某定理成立』等等，則應稍加釐清，以便與專業的邏輯知識接軌，從而讓學生將來有機會選修邏輯課程時，可以從容援引數學例證來協助學習。最後，鑒於邏輯單元被引進高中課程的目的，不外乎是說明『證明』方法的內容、意義與精神，因此，教科書的編者好好地處理數學 **vs.** 邏輯，實在是不能推卸的重責大任！

誌謝： 本文完成後，送請李國偉、張海潮與洪裕宏指正。承李國偉惠賜高見，受益良多。不過，文責理當由筆者自負。

參考文獻

王香評 **(2003).**〈我對『間接證法』的反思〉，《**HPM** 通訊》第六卷第七期，頁 **12-13**。
林正弘 **(1999).**《邏輯》（增訂十版），台北：三民書局。
朱水林 **(1997).**《現代邏輯入門》，台北：九章出版社。

---

[15] 參考黃淑玲，〈我對『正中版』邏輯概念一節的看法〉，見本文附錄 I。
[16] 參考拙文 (2003)。

洪萬生 (2003).〈教改爭議中，證明所爲何事？〉，提交『第十屆張昭鼎紀念研討會－科學與教育』，台北：台灣大學，2003 年 4 月 26-27 日。

約翰卡斯提、維納德包利 (2003).《數學巨人哥德爾－關於邏輯的故事》，台北：究竟出版社。

Brown, James R. (2002). ***Philosophy of Mathematics: An introduction to the world of proofs and pictures.*** **London and New York: Routledge.**

Davis, Martin (2000). ***Engines of Logic: Mathematicians and the Origin of the Computer*****. New York / London: W. W. Norton & Company.**

Gellert, W. ***et al*** **eds. (1977).** ***The VNR Concise Encyclopedia of Mathematics*****. New York: Van Nostrand Reinhold Company.**

Gowers, Timothy (2002). ***Mathematics: A Very Short Introduction*****. Oxford: Oxford University Press.**

Losee, John (1980). ***A Historical Introduction to the Philosophy of Science*****. Oxford: Oxford University Press.**

Kline, Morris (1980). ***Mathematics: The Loss of Certainty*****. New York: Oxford University Press.**

Tymoczko. Thomas ed. (1986). ***New Directions in the Philosophy of Mathematics: An Anthology*****. Boston / Basel / Stuttgart: Birkhauser.**

附錄 I：台北市萬芳中學數學研究群的看法

我對高中數學『龍騰版』邏輯證明的看法

郭嘉慧

1. 高一學習邏輯，重點或許應擺在「學會證明」，而非「學會分析證明」。
2. 整本第一冊用到證明的部分：第一章第一節邏輯本身、第二章第一節證明爲質數、第三章第一節證明爲無理數、第三章第二節證明兩線段長度相等。
3. 在這些證明當中，若將「充分條件」與「必要條件」的介紹去除，直接介紹證明過程，對學生的吸收將更爲順利。例如：
   (1) 將所有第一章第一節中應塡入「充分條件」或「必要條件」的敘述均改爲證明題，直接訓練學生的證明熟練度。甚至可以用「證明或舉反例」的是非題，若敘述爲真，(如：若△ABC 是等角三角形，則△ABC 是等邊三角形)則應證明；否則(如：若△ABC 是銳角三角形，則△ABC 是等邊三角形)則應舉一反例。如此既可使學生熟練三段證法，又可使學生對國中的知識更加熟悉。
   (2) 將第二章第一節的質數證明，直接列出，要求學生模仿即可。
   (3) 第三章第一節無理數的證明，則可介紹「反證法」，也是直接告訴學生：只有兩種可能──有理數或非有理數，所以只要能說明「它」不是有理數，就表示它一定是「非有理數」，也就是無理數。

(4) 經過上述三部分的證明訓練，第三章第二節的線段長度相等的證明，應該是很容易的了。

我對高一上數學『邏輯概念』一節的看法

曾婉婷

從實習到現在，我接觸到的都是高一課程，三年當中，在三個不同的學校，用過了三種不同的版本：大同、南一、龍騰，恰好給了我一個比較的機會。

『大同版』(即現在的『康熙版』) 在這一節很清楚區分成兩大部分：命題、證明。一開始以例子來引導定義什麼叫做「命題」，給了一些真命題與僞命題的例子，讓學生熟悉後，才有「前提」與「結論」這兩個名詞出現。針對正確的命題，隨後才有「充分條件」、「必要條件」與「充分必要條件」，感覺上學生對這部分還算清楚。只是，這一連串的名詞在記憶上會感到有點多。到後面反證法的部分，分別舉了直接與間接兩種證法的例題，有了直接證法作比較，再加上所用的，都是一些比較簡單的例子，學生似乎較能理解爲什麼有些題目要用反證法來處理。

『南一版』將『邏輯概念』放在『集合概念』之後，在一開始就說邏輯推論是一門『有效推論規則的科學』(學生心裡有個大大的問號……)。它有一個別的版本看不到的特性，亦即：相當強調逆命題、否命題、否逆命題與四者之間的等價關係。反倒是在「充分條件」、「必要條件」與「充分必要條件」上，並沒有提供太多的例子，隨後就進入反證法的部分，並在最後將反證法的步驟條列說明。雖然清楚，但是例題使用的討論太多，如例題六：『設 **a** 爲正奇數，試證方程式 $3x^2-17x-a=0$ 沒有整數解。』在證明過程中，還要以 **m** 的奇偶分別討論，對初學者來說有點複雜。

『龍騰版』利用同一個國中學過的幾何圖形，來引導出「命題」、「假設」、「結論」、「充分條件」、「必要條件」與「充要條件」這些名詞。同時，它只介紹逆命題，對於其他命題與等價關係並沒有說明，所以，學生也比較不會覺得混亂。在證明的的部分，還區分爲『歸謬證法』(假設 **p** 成立，而 **q** 不成立會得到矛盾) 和『反證法』(證明若 **q** 不成立，則 **p** 亦不成立)，讓學生有點摸不著頭緒，到底這兩種證明的一同在哪理，感覺上例子也稍嫌難了些，學生接受度並不是很高。譬如例題五，就已經要證明根 $\sqrt{2}$ 爲無理數 (不能寫成分數)，教完之後，我覺得學生還是不懂反證法真正的精神。

觀察這三年中使用的版本與不同特質的學生，再回想自己高一時的學習過程，其實是沒有現在的邏輯、集合與函數這一章的。因此，我有如下的困惑：

1. 學生在國中所學都是比較具體的數學，是可以算的、可以畫的，上了高中，對於『證明』這件事情還不是清楚的時候，就要學習反證法，會不會太難了？如果只是爲了要在往後能夠證明 $\sqrt{2}$ 爲無理數的話，就算沒有事先學過邏輯，應該也可以用直觀的角度來說明這個證明的手法 (一件事情就只有兩種可能的結果的時候，如果其中一個結果是錯的，就只能選擇另一個)，似乎不需要去學「逆命題」、「否命題」、「否逆命題」吧！

2. 在高一所學「充分條件」、「必要條件」與「充要條件」這些名詞，在往後的教學中並不會用到，但是，『蘊涵』這個概念卻是一直在使用的 (由 **p** 可以得到 **q**)，讓學

生知道『**p** 可以得到 **q**』應該比知道『**p** 是 **q** 的充分條件』來得實際且必要。不過，感覺上我們的課本對於「充分條件」、「必要條件」似乎都有某種程度的強調。我想大部分的學生都知道『如果 **a** 是偶數，則 $\mathbf{a}^2$ 也會是偶數』，但應該很少會有人記得『**a** 爲偶數』是『$\mathbf{a}^2$ 爲偶數』的充分條件吧！

我對『正中版』邏輯概念一節的看法

黃淑玲

『正中版』的數學大都採取直接介紹方式，文字淺顯且易懂。在第一節簡單的邏輯概念中，學生不易懂的是充分條件與必要條件(常常混淆)，最記得的是「若 p 則 q」與「非 q 則非 p」是等價命題。我個人認爲充分條件與必要條件這兩個數學名詞知道即可，不必強調亦不宜用來評量，會判斷命題的真僞比較重要。學生雖然知道「若 p 則 q」與「非 q 則非 p」是等價命題，但用在反證法上亦很難接受。我想這應該是因爲學生缺乏幾何證明的訓練，所以推理能力普遍下降所造成。如果有機會的話，希望能恢復幾何證明，讓喜歡思考、推理的人可以享受其中之樂趣。不喜歡數學的人也能從中學習如何判斷、分析、推理事情進而解決生活中的一些問題。