3.2

25.

a).由零向量組成的集合是每一個向量空間的子空間。

b).每一個向量空間至少有兩個不同的子空間。

c).每一個有非零向量的向量空間至少有兩個不同的子空間。

d).如果{v1,v2,…,vn}是一個向量空間 V 的子集合，則 vi 會在 sp(v1,v2,…,vn)裡面。

e).如果{v1,v2,…,vn}是一個向量空間 V 的子集合，則 vi+vj 會在 sp(v1,v2,…,vn)裡面，對所有從 1 到 n 選取的 I 和 j。

f).如果 u+v 在向量空間 V 的子空間 W 裡面，則 u 和 v 都會在 W 裡面。

g).向量空間 V 的兩個子空間的交集可能是空集合。

h).如果 S 是獨立的，每一個在 V 中的向量可以被唯一寫成 S 中向量的線性組合。

i).如果 S 是獨立的而且生成 V，每一個在 V 中的向量可以被唯一寫成 S 中向量的線性組合。

j).如果每一個在 V 中的向量可以被唯一寫成 S 中向量的線性組合，則 S 是一個獨立的集合。

※Answers: T/F/T/T/T/F/F/F/T/T .

※Reasons for choosing “False”:

b). {0} is the zero vector space. It only has a subspace which is itself.

f).For example: Let S be the set of all upper triangular 2×2 matrices and A=$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

B=$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$,then A+B=$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ∈S.But A and B don’t lie in S.

g).All subspaces of vector spaces contain zero vector .So, their intersection contains zero vector.

h).We can’t be sure that S spans V.

26. V 是一個向量空間。
a).在 V 中獨立集合中的每一個向量是它自己生成的子空間的一組基底。
b).如果{v1,v2,…,vn}生成 V，則每一個向量 v∈V 都可以被表達成這個集合的一個線性組合。
c).如果{v1,v2,…,vn}生成 V，則每一個向量 v∈V 都可以被表達成這個集合的唯一的線性組合。
d).如果{v1,v2,…,vn}生成 V，而且是獨立的，則每一個 v∈V 是這個集合的唯一的線性組合。
e).如果{v1,v2,…,vn}生成 V，則這個集合是獨立的。
f).如果每個 v∈V 是這個集合{v1,v2,…,vn}的一個唯一的線性組合，則這個集合是獨立的。
g).如果每個 v∈V 是這個集合{v1,v2,…,vn}的一個唯一的線性組合，則這個集合是一個 V 的基底。
h).所有有基底的向量空間都是有限生成的(finitely generated)。
i).每一個有限生成的向量空間中獨立的子集合是某一些 V 的基底的一部分。
j).任何有限維向量空間的兩個基底有相同的元素個數。

※Answers: T/T/F/T/F/T/T/F/T/T .

※Reasons for choosing "False":
c).Not unique!
e).For example:{[1,0],[0,1],[1,2]} spans R2.But it is not independent.
h).For example : Illustration 1 (page 192 in our text-book): Let P be the vector space of all polynomials, and let M={1,x,x2,…,xn,…} which is infinite be a basis of P, then P is not finitely generated.

3.3

22. V 是一個非零的有限維向量空間。

a).向量空間 V 是同構(isomorphic)於 Rn，對某個正整數 n。

b).每一個向量 v 的座標向量(coordinate vector)只有一個。

c).每一個向量 v 對於一個 V 的基底(relative to a basis for V)的座標向量只有一個。

d).每一個向量 v 對於一個 V 的有序基底(relative to an ordered basis for V)的座標向量只有一個。

e).不同的向量對於相同的有序基底有不一樣的坐標向量。

f).相同的向量對於不同的有序基底不能有一樣的坐標向量。

g).有六種可能的 R3 的有序基底。

h).有六種可能的 R3 由標準單位座標基底(standard unit coordinate vectors)組成的有序基底。

i).重排有序基底的順序對應到相似得重排對應的基底坐標向量的數對。

j).V 中的向量加法和係數乘積可以用對於固定基底的座標向量的加法和係數乘積來計算。

※Answers: T/F/F/T/T/T/F/F or T/T/T .

※Reasons for choosing “False”:

b).Relative to the different ordered base, we will get different coordinate vectors.

c).It is the same reason of b).

g).There are finitely many possible ordered base for R3.

h).(NOT SURE) There are six possible ordered bases for R3, consisting of the standard ordered basis of R3(e1,e2,e3).