

第四章習作參考解法

多重選擇題

1.

因為平均數為 6

$$\text{所以 } \frac{2+4+4+5+5+6+7+8+11+x+y}{11} = 6 \Rightarrow x+y=14$$

因為中位數為 6，所以 $x、y \geq 6$

如果 $x=6$ ，則 $y=8$ ，ok!!

如果 $x=7$ ，則 $y=7$ ，不合(因為 $x < y$)

如果 $x > 7$ ，則 $y < 7$ ，不合(因為 $x < y$)

所以得知 $x=6, y=8$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{11}(2^2+4^2+4^2+5^2+5^2+6^2+7^2+8^2+11^2+6^2+8^2-11 \times 6^2)} = \sqrt{\frac{60}{11}} < 3$$

(1) $x+y=14$ ，ok!!

(2) $6 \leq x < 7$ ，ok!!

(3) $y > 8$ ，不合(因為 $y=8$)

(4) $y < 9$ ，ok!!

(5) 標準差至少是 3，不合($\sigma = \sqrt{\frac{60}{11}} < 3$)

Ans : (1),(2),(4) #

2.

(1) x 的中位數介在 30~35 中間， y 的中位數介在 25~30 中間，所以 x 的中位數 $>$ y 的中位數，ok!!!

(2) 由圖形可知，這組二維數據的 x 方向較 y 方向分散，所以 x 的標準差 $>$ y 的標準差，ok!!!

(3) 由圖形可知， x 的全距 $>$ y 的全距，ok!!!

(4) 這題在考的就是， x 和 y 的中位數是不是對應到同一個點，如果是的話 z 的中位數 = x 的中位數 + y 的中位數
而實際上 x 和 y 的中位數對應到不同個點，所以 z 的中位數 \neq x 的中位數 + y 的中位數

(5) 由圖形可知， x 與 y 為正相關，ok!!!

Ans : (1),(2),(3), (5) #

3.

(1) ok!!!

(2) 因為相關係數 = 0.016，非常的小，所以 x 與 y 的關係不適合用一條直線來表示

(3) $x+5$ 為 x 的平移，而且 $y+5$ 為 y 的平移，所以相關係數不會改變

所以 $x+5$ 與 $y+5$ 的相關係數仍為 0.016，ok!!!

(4) $10x$ 為 x 的伸縮，而且 $10y$ 為 y 的伸縮，又 $10 \times 10 = 100 > 0$

所以 $10x$ 與 $10y$ 的相關係數仍為 0.016，ok!!!

(5) $x' = \frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}$ 為 x 的標準化數據， $y' = \frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}$ 為 y 的標準化數據，所以相關係數不會改變

所以 $x' = \frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}$ 與 $y' = \frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}$ 的相關係數仍為 0.016，ok!!!

Ans : (1),(3),(4), (5) #

填充題

1.

平時考佔的比例：30%，兩次考各佔的比例：20%，期末考佔的比例：30%

平時考取最高的三次分數為：82、73、85

$$\text{所以平時考的平均爲 } \frac{82+73+85}{3} = 80$$

$$\begin{aligned}\text{所以學期平均} &= 80 \times 30\% + 86 \times 20\% + 79 \times 20\% + 90 \times 30\% \\ &= 80 \times 0.3 + 86 \times 0.2 + 79 \times 0.2 + 90 \times 0.3 \\ &= 24 + 17.2 + 15.8 + 27 \\ &= 84 \text{ 分 \#}\end{aligned}$$

2.

$$y_i = 10\sqrt{x_i} \Rightarrow x_i = \frac{1}{100}y_i^2$$

設全班有 k 人

$$\text{所以全班調分前的平均爲 } \bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{100} y_i^2 = \frac{1}{100k} \sum_{i=1}^k y_i^2$$

$$\text{所以我們要先算 } \sum_{i=1}^k y_i^2$$

由調分後的標準差為15分，可知：

$$\sqrt{\frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k y_i^2 - k \times 65^2 \right)} = 15 \Rightarrow \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^k y_i^2 - 4225k \right) = 225 \Rightarrow \sum_{i=1}^k y_i^2 = 4225k + 225k = 4450k$$

$$\text{所以 } \bar{x} = \frac{1}{100k} \sum_{i=1}^k y_i^2 = \frac{1}{100k} \times 4450k = 44.5$$

所以 $M = 44.5$

所以 $n = 44$ #

3.

$$\bar{x} = \frac{1}{40} \sum_{i=1}^{40} x_i = \frac{120}{40} = 3, \quad \bar{y} = \frac{1}{40} \sum_{i=1}^{40} y_i = \frac{100}{40} = 2.5$$

$$(1) x \text{ 的標準差} = \sigma_X = \sqrt{\frac{1}{40} \left(\sum_{i=1}^{40} x_i^2 - 40 \times 3^2 \right)} = \sqrt{\frac{1360 - 360}{40}} = \sqrt{\frac{1000}{40}} = \sqrt{25} = 5 \text{ \#}$$

$$(2) \sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{40} \left(\sum_{i=1}^{40} y_i^2 - 40 \times 2.5^2 \right)} = \sqrt{\frac{500 - 250}{40}} = \sqrt{\frac{250}{40}} = \frac{5}{2}$$

$$S_{XY} = \sum_{i=1}^{40} x_i y_i - 40 \times 3 \times 2.5 = 700 - 300 = 400$$

$$x \text{ 與 } y \text{ 的相關係數} = r_{XY} = \frac{S_{XY}}{n\sigma_X\sigma_Y} = \frac{400}{40 \times 5 \times \frac{5}{2}} = \frac{400}{500} = 0.8 \text{ \#}$$

4.

(1) 中位數 = 4, 眾數 = 6

所以 $(a, b) = (4, 6)$ #

$$(2) \bar{x} = \frac{1 \times 6 + 2 \times 9 + 3 \times 8 + 4 \times 9 + 5 \times 12 + 6 \times 16}{60} = 4$$

$$\text{變異數} = \sigma^2 = \frac{(-3)^2 \times 6 + (-2)^2 \times 9 + (-1)^2 \times 8 + 0^2 \times 9 + 1^2 \times 12 + 2^2 \times 16}{60} = 2.9 \text{ #}$$

5.

$$\bar{x} = \frac{3+2+6+1}{4} = 3, \bar{y} = \frac{6+4+7+3}{4} = 5$$

$$x_i - \bar{x} : 0, -1, 3, -2$$

$$y_i - \bar{y} : 1, -1, 2, -2$$

$$S_{XY} = 0 + 1 + 6 + 4 = 11, S_{XX} = 0 + 1 + 9 + 4 = 14$$

$$b = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{11}{14}$$

$$\text{設迴歸直線} : y = a + \frac{11}{14}x$$

$$(3, 5) \text{ 代入} : 5 = a + \frac{11}{14} \times 3 \Rightarrow a = 5 - \frac{33}{14} = \frac{70-33}{14} = \frac{37}{14}$$

$$\text{所以迴歸直線方程式} : y = \frac{37}{14} + \frac{11}{14}x \text{ #}$$

6.

(1)

$$\bar{x} = \frac{8+3+1+4+6+5+8+3+3+9}{10} = 5$$

將 y_i 由小排到大 : 2, 4, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 11, 11

$$y \text{ 的中位數} = \frac{6+7}{2} = 6.5$$

所以 $(a, b) = (5, 6.5)$ #

(2)

$$\bar{y} = \frac{11+4+4+5+11+7+9+2+6+11}{10} = 7$$

$$x_i - \bar{x} : 3, -2, -4, -1, 1, 0, 3, -2, -2, 4$$

$$y_i - \bar{y} : 4, -3, -3, -2, 4, 0, 2, -5, 1, 4$$

$$S_{XY} = 12 + 6 + 12 + 2 + 4 + 0 + 6 + 10 + 2 + 16 = 70$$

$$S_{XX} = 9 + 4 + 16 + 1 + 1 + 0 + 9 + 4 + 4 + 16 = 64$$

$$S_{YY} = 16 + 9 + 9 + 4 + 16 + 0 + 4 + 25 + 1 + 16 = 100$$

$$\text{所以 } r = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX}}\sqrt{S_{YY}}} = \frac{70}{\sqrt{64}\sqrt{100}} = \frac{7}{8} \text{ #}$$

7.

(1)請同學模仿第 5 題做做看

迴歸直線方程式： $y = 3.6 + 0.18x$ #

(2) $x = 75$ 代入： $y = 3.6 + 0.18 \times 75 = 17.1$

Ans : 17.1 公里/升 #