第二章習作參考解法

多重選擇題

1.

先備知識：$C_k^n = C_{n-k}^n$

題目中可得知　：$C_k^n : C_k^{n+1} = 9:13$　→稱爲條件 1

還可從題目中得知：$C_k^n = C_{3k-4}^n$　→稱爲條件 2

從條件 2 開始考慮，配合先備知識可以知道 $C_{n-k}^n = C_k^n = C_{3k-4}^n$

所以 $k = 3k-4$　→稱爲情況 1

或者 $n-k = 3k-4$　→稱爲情況 2

如果是情況 1：

則 $k = 3k-4 \Rightarrow 2k-4=0 \Rightarrow k=2$

代入條件 1：$C_2^n : C_2^{n+1} = 9:13 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2\times1} : \frac{(n+1)n}{2\times1} = 9:13$

由內項積=外項積可以得知：

$13\times\frac{n(n-1)}{2\times1} = 9\times\frac{(n+1)n}{2\times1} \Rightarrow 13(n-1) = 9(n+1) \Rightarrow 4n = 22 \Rightarrow n = \frac{11}{2} = 5.5$ (不合，因爲不會有小數項)

所以情況 1 不會發生.

如果是情況 2：

則 $n-k = 3k-4 \Rightarrow n = 4k-4$ ......※

代入條件 1：$C_k^{4k-4} : C_k^{(4k-4)+1} = 9:13 \Rightarrow C_k^{4k-4} : C_k^{4k-3} = 9:13 \Rightarrow \frac{(4k-4)!}{k!(3k-4)!} : \frac{(4k-3)!}{k!(3k-3)!} = 9:13$

由內項積=外項積可以得知：

$13\times\frac{(4k-4)!}{k!(3k-4)!} = 9\times\frac{(4k-3)!}{k!(3k-3)!}$

兩邊同乘 $\frac{k!(3k-3)!}{(4k-4)!}$ 得：$13\times(3k-3) = 9\times(4k-3) \Rightarrow 39k-39 = 36k-27 \Rightarrow 3k=12 \Rightarrow k=4$

代入※：$n = 4k-4 = 4\times4-4 = 12$

看第(1)個選項：Yes!

看第(2)個選項：No!

看第(3)個選項：$P_k^n = P_4^{12} = \frac{12!}{(12-4)!}$，$C_k^n = C_4^{12} = \frac{12!}{4!(12-4)!}$，所以 $P_k^n = 4!C_k^n = 24C_k^n$，Yes!

看第(4)個選項：求$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$的非負整數解 $\Rightarrow$ 求$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$的非負整數解

所以看成有 x_1、x_2、x_3、x_4，4 個袋子，有 12 個相同的球，所以情況有 H_{12}^4 (4 袋 12 球)種

$H_{12}^4 = C_{12}^{15} \neq C_{11}^{15}$，No!

看第(5)個選項：求$x_1+x_2+\cdots+x_n=k$的非負整數解$\Rightarrow$求$x_1+x_2+\cdots+x_{11}+x_{12}=4$的非負整數解

所以看成有x_1、x_2、$\cdots$、x_{11}、x_{12}，12 個袋子，有 4 個相同的球，所以情況有H_4^{12}(12 袋 4 球)種

$H_4^{12}=C_4^{15}=C_{11}^{15}$，Yes!

$Ans:(1).(3).(5)$ #

2.

(1)8 件**相異物**

考慮沒限制分法－有一個人拿 0 件＋有兩個人拿 0 件－有三個人拿 0 件 →排容原理

↓ ↓ ↓ ↓

3^8 － $C_1^3\times 2^8$ ＋ $C_2^3\times 1^8$ － $C_3^3\times 0^8$

=6561 - 768 + 3 - 0=5796，Yes！

(2)先將八件**相異物**分成 2，2，4，再分給甲乙丙三人。

$\dfrac{C_2^8C_2^6C_4^4}{2!}$ × 3! $=\dfrac{28\times 15\times 1}{2}\times 6=1260$，Yes!

(除 2!的原因是 2，2 是相同物)

(3)先把兩件**相異物**給甲，剩下六件**相異物**分給乙跟丙

C_2^8 × 2^6 $=28\times 64=1792$，No!

(4)題意可轉換爲$x+y+z=8,x\ge 1,y\ge 2,z\ge 0$

$\Rightarrow (x'+1)+(y'+2)+z=8,x'\ge 0,y'\ge 0,z\ge 0$

$\Rightarrow x'+y'+z=5,x'\ge 0,y'\ge 0,z\ge 0$

所以看成有x'、y'、z，3 個袋子，有 5 個相同的球，所以情況有H_5^3(3 袋 5 球)種

$H_5^3=C_5^7=21$，Yes!

(5)可以考慮每人最少一件的所有情況－每人最少一件且有人超過 4 件的情況

◎每人最少一件：$x+y+z=8,x\ge 1,y\ge 1,z\ge 1$

$\Rightarrow (x'+1)+(y'+1)+(z'+1)=8,x'\ge 0,y'\ge 0,z'\ge 0$

$\Rightarrow x'+y'+z'=5,x'\ge 0,y'\ge 0,z'\ge 0$

所以看成有x'、y'、z'，3 個袋子，有 5 個相同的球，所以情況有H_5^3(3 袋 5 球)種

$H_5^3=C_5^7=21$

◎每人最少一件且有人超過 4 件的情況：可分成 5,2,1 跟 6,1,1 兩種情形

8 個相同分成 5,2,1，再分給甲乙丙三人的情況爲

1 × 3! =6

8 個相同分成 6,1,1，再分給甲乙丙三人的情況爲

1 × $\dfrac{3!}{2!}$ =3

所以這題答案是：每人最少一件的所有情況－每人最少一件且有人超過 4 件的情況

= 21 - (6+3) =12 Yes!

$Ans:(1).(2).(4).(5)$ #

填充題

1.

□□□□□□

↑ ↑ ↑ ↑

因爲甲乙丙連著坐，所以最前面的人會有下面四個箭頭種坐法；因爲甲坐在乙丙中間，所以乙丙可以互換

4 × 2!

=8 #

2.

題目的意思是說：30 支球隊中，每兩隊都要比過比賽。 如果某兩隊是同區的，則他們要比 4 場； 如果某兩隊是不同區的，則他們要比 2 場。

分成同區交手，跟不同區的兩隊來討論。

同區：$C_1^2 \times C_2^{15} \times 4 = 2\times105\times4 = 840$

↑ 選東或西　↑ 15 隊中挑 2 對出來打　↑ 同區打 4 場

不同區：$C_1^{15} \times C_1^{15} \times 2 = 15\times15\times2 = 450$

↑ 東區挑一隊　↑ 西區挑一隊　↑ 不同區打 2 場

總共=同區+不同區=840+450=1290 #

3.

(1) $\frac{7!}{2!2!} = 1260$ #

(2) 題目要求的可以看成：任意排列 － 1 組相同字母相鄰 ＋ 2 組相同字母相鄰 (排容原理)

$$\frac{7!}{2!2!} - C_1^2 \times \frac{6!}{2!} + 5!$$

↑ 同第 3.(1)題　↑ 2 個字母選　↑ 1 組要相鄰的看成一物，剩 6 物，然後排列　↑ 2 組要相鄰的看成一物，剩 5 物，然後排列

=1260-720+120=660 #

ps：這題也可以用插空格的方法，不過容易少數。

4.

(1) 先從六男中選出三男，再從六女選出一女

$C_3^6 \quad \times \quad C_1^6 \quad = 20 \times 6 = 120$ #

(2)這題有很多看法，這裡提供三個看法。

<法一>： $C_1^6 \times \dfrac{C_1^{10} \times C_1^8}{2} = 240$

C_1^6 的原因：從 6 對夫妻中挑出題目要的那一對。

C_1^{10} 的原因：從剩下 10 人中先挑 1 人出來。

C_1^8 的原因：從剩下 9 人中挑出 1 人，但是又不能夠挑上面那人的另一半，所以變成從剩下 8 人中挑 1 人。

除以 2 的原因：假設剩下的 10 人男生爲 ABCDE，女生爲 abcde

則 $C_1^{10} \times C_1^8$ 的挑法，有可能先挑 A 再挑 B，也有可能先挑 B 再挑 A，所以會重複到。

<法 2>： $C_1^6 \times \left(C_2^{10} - 5\right) = 240$

C_1^6 的原因：從 6 對夫妻中挑出題目要的那一對。

C_2^{10} 的原因：從剩下 10 人中直接挑 2 人出來。

-5 的原因：挑到夫妻的情況要扣掉，剩下 10 人中有 5 對夫妻。

<法 3> $C_1^6 C_2^5 C_1^2 C_1^2 = 240$

C_1^6 的原因：從 6 對夫妻中挑出題目要的那一對。

C_2^5 的原因：從剩下 5 對夫妻直接挑 2 對出來。

$C_1^2 C_1^2$ 的原因：從挑出來的 2 對夫妻中各挑 1 人出來。

$Ans: 240$ #

5.

考慮　甲乙○　　○○○　　○○○　　這樣的三隊

則有 $C_1^7 \dfrac{C_3^6 C_3^3}{2!} = 70$ 種

C_1^7 的原因：扣除甲乙剩下 7 人，選 1 人跟甲乙同隊。

$C_3^6 C_3^3$ 的原因：剩下 6 個選 3 個放在中間那隊，最後 3 個選 3 個放在右邊那隊。

除以 2 的原因：假設剩下 6 人是 ABCDEF

則 $C_3^6 C_3^3$ 有可能會先挑 ABC，再挑 DEF；也有可能會先挑 DEF，再挑 ABC

因爲不用排順序，所以 ABC　DEF 跟 DEF　ABC 會重複算，所以要除以 2

$Ans: 70$ #

6.

Q：如何組成長方形？　　A：選兩條直的跟選兩條橫的。

題目問有多少個邊長落在 L 邊上的長方形，表示他給定了一條直的，所以直得我們只能選 1 條。

直的總共有 7 條，要選 1 條；橫的總共有 5 條，要選 2 條。

所以總共有：　$C_1^7 \quad \times \quad C_2^5 \quad = 70$ #

7.

因爲分書跟分筆的情況是要搭配的，所以我們可以先算出分書跟分筆的情況，再相乘

分「6 本不同」的書：

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{6 本挑 1 本給甲}}}{C_1^6} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{剩下 5 本挑 1 本給乙}}}{C_1^5} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{剩下 4 本通通給丙}}}{C_4^4} = 30$$

分「7 枝相同」的筆：因爲總共有 7 枝筆，丙要分到 2 枝，所以剩下的 5 枝任意分給甲乙。

假設甲拿到 x 枝，乙拿到 y 枝，則我們要算的就是 $x+y=5$ 的非負整數解。

所以我們可以看成有 x 、 y 兩個袋子，有 5 顆球，所以情況有 H_5^2 (2 袋 5 球)種

$H_5^2 = C_5^6 = 6$

所以分書的情況搭配分筆的情況，總共有 $30 \times 6 = 180$ 種 #

8.

※要求正因數，會先想到什麼？答案是直因數分解。

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

所以 x 、 y 、 z 都是由 2 的某個次方跟 3 的某個次方，跟 5 的某個次方所組成。

所以我假設 $x = 2^{x_1}3^{x_2}5^{x_3}$ ， $y = 2^{y_1}3^{y_2}5^{y_3}$ ， $z = 2^{z_1}3^{z_2}5^{z_3}$

因爲 $xyz = 360$ ，所以 $2^3 \times 3^2 \times 5 = 2^{x_1+y_1+z_1} \times 3^{x_2+y_2+z_2} \times 5^{x_3+y_3+z_3}$

因爲 2 的次方跟 3 的次方跟 5 的次方的情況是要搭配的，所以我們先算出各別的情況再相乘。

從 2 的次方我們可以得知 $x_1 + y_1 + z_1 = 3, x_1 \ge 0, y_1 \ge 0, z_1 \ge 0 \Rightarrow$ 有 H_3^3 種。

從 2 的次方我們可以得知 $x_2 + y_2 + z_2 = 2, x_2 \ge 0, y_2 \ge 0, z_2 \ge 0 \Rightarrow$ 有 H_2^3 種。

從 2 的次方我們可以得知 $x_3 + y_3 + z_3 = 1, x_3 \ge 0, y_3 \ge 0, z_3 \ge 0 \Rightarrow$ 有 H_1^3 種。

所以 x 、 y 、 z 的正整數解總共有 $H_3^3 \times H_2^3 \times H_1^3 = C_3^5 \times C_2^5 \times C_1^5 = 180$ 組。 #

9.

x^3y^5 項： $C_3^8(ax)^3y^5 = C_3^8a^3x^3y^5$ ，所以 x^3y^5 項的係數是 $C_3^8a^3$

又由題目知道： x^3y^5 項的係數是 -7 ，所以 $C_3^8a^3 = -7 \Rightarrow \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}a^3 = -7 \Rightarrow a^3 = -\frac{1}{8} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

x^5y^3 項： $C_5^8\left(-\frac{1}{2}x\right)^5y^3 = C_5^8\left(-\frac{1}{2}\right)^5x^5y^3 = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}\times\left(-\frac{1}{32}\right)x^5y^3 = -\frac{7}{4}x^5y^3$

所以 x^5y^3 項的係數是 $-\frac{7}{4}$ #

10.

$$C_0^{20}+3C_1^{20}+9C_2^{20}+\cdots+3^{20}C_{20}^{20}=C_0^{20}\times 1^{20}\times 3^0+C_1^{20}\times 1^{19}\times 3^1+C_2^{20}\times 1^{18}\times 3^2+\cdots+C_{20}^{20}\times 1^0\times 3^{20}$$

看到 C_0^{20} 、 C_1^{20} 、$\cdots$、 C_{20}^{20} ，要聯想到二項式定理。

二項式定理　　　　　　：$(x+y)^n=C_0^n x^n y^0+C_1^n x^{n-1}y+\cdots+C_{n-1}^n xy^{n-1}+C_n^n x^0 y^n$

$x=1, y=3, n=20$ 代入：$(1+3)^{20}=C_0^{20}\times 1^{20}\times 3^0+C_1^{20}\times 1^{19}\times 3+\cdots+C_{19}^{20}\times 1\times 3^{19}+C_{20}^{20}\times 1^0\times 3^{20}$

所以 $C_0^{20}+3C_1^{20}+9C_2^{20}+\cdots+3^{20}C_{20}^{20}=4^{20}=2^{40}$

令 $x=2^{40}$
兩邊取 *log*：

$$\log(x)=\log\left(2^{40}\right)=40\log(2)\fallingdotseq 40\times 0.3010=12.04$$

$\Rightarrow x=10^{12.04}=10^{12}\times 10^{0.04}$
所以 x 的尾巴有 12 個 0
所以 x 是 13 位數 #