4-2 習作參考解法

基本題

1. (1)(2)略 #

2. $\bar{x}=\dfrac{1+6+2+3}{4}=3$，$\bar{y}=\dfrac{3+8+4+5}{4}=5$

$x_i-\bar{x}$ ：-2，3，-1，0

$y_i-\bar{y}$ ：-2，3，-1，0

$S_{XY}=(-2)(-2)+3\times 3+(-1)(-1)+0\times 0=14$

$S_{XX}=(-2)^2+3^2+(-1)^2+0^2=14$

$S_{YY}=(-2)^2+3^2+(-1)^2+0^2=14$

相關係數$=r=\dfrac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX}}\sqrt{S_{YY}}}=\dfrac{14}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}}=1$ #

3. $\bar{x}=\dfrac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}x_i=\dfrac{100}{50}=2$，$\bar{y}=\dfrac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}y_i=\dfrac{250}{50}=5$

$$\sigma_X=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{50}x_i^{\,2}-50\bar{x}^2}{50}}=\sqrt{\frac{1200-50\times 2^2}{50}}=\sqrt{\frac{1000}{50}}=\sqrt{20}$$

$$\sigma_Y=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{50}y_i^{\,2}-50\bar{y}^2}{50}}=\sqrt{\frac{1500-50\times 5^2}{50}}=\sqrt{\frac{250}{50}}=\sqrt{5}$$

$$S_{XY}=\sum_{i=1}^{50}x_iy_i-50\overline{xy}=900-50\times 2\times 5=400$$

相關係數$=r=\dfrac{S_{XY}}{n\sigma_X\sigma_Y}=\dfrac{400}{50\times\sqrt{20}\times\sqrt{5}}=\dfrac{400}{50\times 10}=\dfrac{4}{5}=0.8$ #

標準題

4. $\bar{x}=\dfrac{100+101+102+103+104}{5}=102$，$\bar{y}=\dfrac{1+5+3+9+7}{5}=5$

$x_i-\bar{x}$ ：-2，-1，0，1，2

$y_i-\bar{y}$ ：-4，0，-2，4，2

$S_{XY}=(-2)(-4)+(-1)\times 0+0\times(-2)+1\times 4+2\times 2=16$

$S_{XX}=(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2=10$

$$b=\frac{S_{XY}}{S_{XX}}=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$$

所以迴歸直線：$y=a+\frac{8}{5}x$

因爲$(\bar{x},\bar{y})=(102,5)$是迴歸直線上的一點，所以代入迴歸直線求$a$

$$5=a+\frac{8}{5}\times 102 \Rightarrow a=5-\frac{8}{5}\times 102=\frac{25-816}{5}=-\frac{791}{5}$$

所以迴歸直線：$y=-\frac{791}{5}+\frac{8}{5}x$ #

5. $\bar{x}=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}x_i=\frac{1200}{20}=60$，$\bar{y}=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}y_i=\frac{1400}{20}=70$

$$S_{XY}=\sum_{i=1}^{20}x_iy_i-20\overline{xy}=84300-20\times 60\times 70=84300-84000=300$$

$$S_{XX}=\sum_{i=1}^{20}{x_i}^2-20\bar{x}^2=72600-20\times 60^2=72600-72000=600$$

$$b=\frac{S_{XY}}{S_{XX}}=\frac{300}{600}=0.5$$

所以迴歸直線：$y=a+0.5x$

因爲$(\bar{x},\bar{y})=(60,70)$是迴歸直線上的一點，所以代入迴歸直線求$a$

$70=a+0.5\times 60 \Rightarrow a=70-30=40$

所以迴歸直線：$y=40+0.5x$

當$x=50$時：$y=40+0.5\times 50=65$ #

6. 模仿第 4 題，自己算算看.

迴歸直線：$y=\frac{-80450}{190}+\frac{41}{190}x$

當$x=2010$時：$y\fallingdotseq 10.32$百萬 #

7.

標準化調整： 調整前的分數算出來的標準化數據 ＝ 調整後的分數算出來的標準化數據.

設經過標準化調整的分數爲x分

所以$\frac{62-50}{6}=\frac{x-70}{8}\Rightarrow\frac{12}{6}=\frac{x-70}{8}\Rightarrow x-70=16\Rightarrow x=86$

Ans：86 分 #

引導題

8. (1)

講義上學到的 $y=a+bx$ 如果是迴歸直線，它滿足兩件事情： ①. $b=\dfrac{S_{XY}}{S_{XX}}$ ， 也就是 $y=a+bx$ 的斜率 $=\dfrac{S_{XY}}{S_{XX}}$ ②. 點 $(\bar{x},\bar{y})$ 在 $y=a+bx$ 上.

題目要驗證 $\dfrac{y-\bar{y}}{\sigma_Y}=r\dfrac{x-\bar{x}}{\sigma_X}$ 是迴歸直線，所以我們要驗證下面兩件事情： ①. $\dfrac{y-\bar{y}}{\sigma_Y}=r\dfrac{x-\bar{x}}{\sigma_X}$ 的斜率 $=\dfrac{S_{XY}}{S_{XX}}$ ②. $(\bar{x},\bar{y})$ 在這條直線上.

首先，改寫 $\dfrac{y-\bar{y}}{\sigma_Y}=r\dfrac{x-\bar{x}}{\sigma_X}$ ，我們可以寫成 $y=r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\bar{x})+\bar{y}$

則這條線的斜率 $=r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ (把直線寫成 y 在等號左邊，而且係數是 1，這時候 x 的係數就是斜率)

驗證：

①. $r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}=\dfrac{S_{XY}}{S_{XX}}$ ：

$$r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}=\frac{S_{XY}}{n\sigma_X\sigma_Y}\times\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}=\frac{S_{XY}}{n\sigma_X{}^2}=\frac{S_{XY}}{n\times\left[\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x)^2}\right]^2}=\frac{S_{XY}}{n\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x)^2}$$

$$=\frac{S_{XY}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x)^2}=\frac{S_{XY}}{S_{XX}}$$ ， ok!

②. $(\bar{x},\bar{y})$ 在 $y=r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\bar{x})+\bar{y}$ 上：

將 $(\bar{x},\bar{y})$ 代入 $y=r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\bar{x})+\bar{y}$ ：

$\bar{y}=r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(\bar{x}-\bar{x})+\bar{y}=\bar{y}$ ，等號成立

所以 $(\bar{x},\bar{y})$ 在 $y=r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\bar{x})+\bar{y}$ 上 ， ok!

由以上兩點驗證，我們知道 $\dfrac{y-\bar{y}}{\sigma_Y}=r\dfrac{x-\bar{x}}{\sigma_X}$ 是 Y 對 X 的迴歸直線. #

(2) 已知 $(\bar{x},\bar{y})=(6,\bar{y})$ 是迴歸直線 $y=2x+5$ 上面的一點，
所以將 $(\bar{x},\bar{y})=(6,\bar{y})$ 代入，等號會成立： $\bar{y}=2\times6+5=17$.

由第(1)小題的驗證可以知道迴歸直線的斜率也 $=r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$

所以 $2=0.8\times\dfrac{\sigma_Y}{5}\Rightarrow 2=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sigma_Y}{5}\Rightarrow 4\sigma_Y=50\Rightarrow\sigma_Y=\dfrac{50}{4}=\dfrac{25}{2}=12.5$ #