

#### 4-1 小考 2 參考解法

##### 一、單選題：

1. 因為標準差所代表的意義就是分散程度，所以這題等於要我們比較三位同學成績的分散程度。  
因為要比較資料的分散程度，所以會選擇一個基準點，通常我們選擇的是平均數。

先算三個人的平均數：

$$\bar{A} = \frac{45 + 55 + 63 + 59 + 51}{5} = 54.6$$

$$\bar{B} = \frac{38 + 48 + 56 + 52 + 44}{5} = 47.6$$

$$\bar{C} = \frac{47 + 52 + 56 + 54 + 50}{5} = 51.8$$

把每個人的每科成績減去平均成績，可以得到下面的表：

	國文	英文	數學	社會	自然
A	-9.6	0.4	8.4	4.4	-3.6
B	-9.6	0.4	8.4	4.4	-3.6
C	-4.8	0.2	4.2	2.2	-1.8

很明顯可以看出來 AB 分散程度相同，而 C 的分散程度最小

所以  $\sigma_A = \sigma_B > \sigma_C$

Ans : B #

2. 全班的分數，扣掉最高分跟最低分，剩下的分數會比較集中，所以  $\sigma \leq 12$ .

如果最高分 99 分，最低分 59 分，這樣的話，扣除最高跟最低分，剩下來的平均就會小於原本的平均。

如果最高分 61 分，最低分 10 分，這樣的話，扣除最高跟最低分，剩下來的平均就會大於原本的平均。

所以光看扣除最高分和最低分，而不知道最高跟最低分是幾分，我們是無法確定後來的平均是怎麼樣的

所以無法確定  $\bar{x}$  的大小，但  $\sigma \leq 12$

Ans : D #

##### 二、多選題：

3. 略。

### 三、填充題：

4. (1)  $f(x)$  的最小值發生在  $x = \bar{x} = \frac{11+12+13+14+15+25+26+27+28+29}{10} = 20$  #

(2)  $g(x)$  的最小值發生在中位數的地方

$g(x)$  的最小值發生在中位數的地方的原因：

※我們可以先去考慮兩個絕對值的情況，考慮  $|x-1| + |x-9|$ ，

意思就是  $x$  到 1 和  $x$  到 9 的距離和

所以我們可以把 1 和 9 標在數線上，找找看哪個  $x$  到 1 和到 9 的距離和是最小的。

※我們接下來去考慮三個絕對值的情況，考慮  $|x-1| + |x-3| + |x-9|$ ，

意思就是  $x$  到 1 和  $x$  到 3 和  $x$  到 9 的距離和

所以我們可以把 1 和 3 和 9 標在數線上，找找看哪個  $x$  到 1 和  $x$  到 3 和到 9 的距離和是最小的。

※我們可以再考慮四個絕對值的情況，考慮  $|x-1| + |x-3| + |x-7| + |x-9|$

最後我們會發現這種的好幾個絕對值相加，最小值會發生在中位數

全部的數：11、12、12、13、13、13、14、14、14、14、15、15、15、15、15，共 15 個數

中位數 = 14

Ans：14 #

5. 題目說： $a, b, c, d, e, f, 5, 8, 9, 14$  的平均跟  $a, b, c, d, e, f$  的平均相等，  
然後題目要求  $a, b, c, d, e, f, 5, 8, 9, 14$  的平均，所以我們求  $a, b, c, d, e, f$  的平均也可以。  
設  $A = a + b + c + d + e + f$ ，則：

$$\frac{A+5+8+9+14}{10} = \frac{A}{6} \Rightarrow 6(A+5+8+9+14) = 10A \Rightarrow 4A = 6(5+8+9+14) = 216 \Rightarrow A = 54$$

$$\Rightarrow \text{所求} = \frac{A}{6} = \frac{54}{6} = 9 \quad \#$$

6.

眾數 = 5

我們可以考慮三種情況： $x < 6$ ， $x = 6$ ， $x > 6$ ，因為  $x$  是整數，所以  $x < 6$  跟  $x \leq 5$  是一樣的事情

第一種， $x \leq 5$ ：則中位數 = 5，算術平均數 = 5，不合(因為很明顯算術平均數不等於 5)

第二種， $x = 6$ ：則中位數 = 6，算術平均數 = 7，不合(因為算術平均數 =  $\frac{5+5+5+9+6+6+12}{7} = \frac{48}{7} \neq 7$ )

第三種， $x > 6$ ：則中位數 = 6，算術平均數 = 7  $\Rightarrow \frac{5+5+5+9+x+6+12}{7} = 7 \Rightarrow \frac{42+x}{7} = 7 \Rightarrow x = 7$ ，ok!!

所以  $x = 7$  #

7.

男生的總分  $60 \times 20 = 1200$ ，女生的總分  $80 \times 30 = 2400$ ，全體的總分  $1200 + 2400 = 3600$

$$\text{所以全體的平均} = \frac{3600}{50} = 72$$

假設 20 個男生為  $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ ，由標準差 = 5 可以得知：

$$\sqrt{\frac{1}{20} \left( \sum_{i=1}^{20} x_i^2 - 20 \times 60^2 \right)} = 5 \Rightarrow \sum_{i=1}^{20} x_i^2 - 20 \times 60^2 = 500 \Rightarrow \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 72500$$

假設 30 個女生為  $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{50}$ ，由標準差 = 8 可以得知：

$$\sqrt{\frac{1}{30} \left( \sum_{i=21}^{50} x_i^2 - 30 \times 80^2 \right)} = 8 \Rightarrow \sum_{i=21}^{50} x_i^2 - 30 \times 80^2 = 1920 \Rightarrow \sum_{i=21}^{50} x_i^2 = 193920$$

$$\text{所以全體的標準差} = \sqrt{\frac{1}{50} \left( \sum_{i=1}^{50} x_i^2 - 50 \times 72^2 \right)} = \sqrt{\frac{1}{50} (72500 + 193920 - 259200)} = \sqrt{\frac{7220}{50}} = \sqrt{144.4} \doteq 12 \quad \#$$

8. 假設原始成績為  $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ ，調分後的成績為  $y_1, y_2, \dots, y_{100}$

$$\text{則：} y_i = 10\sqrt{x_i} \Rightarrow y_i^2 = 100x_i \Rightarrow x_i = \frac{y_i^2}{100}$$

$$\text{所以調分前的平均} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_i = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \frac{y_i^2}{100} = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{100} y_i^2$$

$$\text{所以我們要先算 } \sum_{i=1}^{100} y_i^2$$

由調分後的標準差 = 15 可以得知：

$$\sqrt{\frac{1}{100} \left( \sum_{i=1}^{100} y_i^2 - 100 \times 75^2 \right)} = 15 \Rightarrow \sum_{i=1}^{100} y_i^2 - 100 \times 75^2 = 22500 \Rightarrow \sum_{i=1}^{100} y_i^2 = 562500 + 22500 = 585000$$

$$\text{所以調分前的平均} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_i = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \frac{y_i^2}{100} = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{100} y_i^2 = \frac{585000}{10000} = 58.5 \text{ 分} \quad \#$$

#### 四、計算題

9.

(1)

有組距個數是  $n$  的分組數據，無論  $n$  是奇數偶數，中位數都是第  $\frac{n}{2}$  個數。

算中位數時，要先找出它所在的組，再看它所佔的比例，最後找出它的數字。

總共有  $2+8+16+10+4=40$  個數字，所以中位數在第  $\frac{40}{2}=20$  個數。

整體的第 20 個數在 40~50 分這組的第 10 個數，而整組有 16 個人。

在 40~50 分這組總共有 10 分，我們想算第 10 個數是這組的第幾分，假設第 10 個數=這組的第  $x$  分。

$$\text{則 } \frac{10}{16} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = \frac{100}{16} = 6.25$$

↑    ↑

↑    10 分中的第  $x$  分

16 人中的第 10 個人

因為 40~50 這組的下界是 40 分，所以算出來的  $x$  要再加上 40 才會是中位數

所以中位數 =  $40 + 6.25 = 46.25$  分 #

$$(2) \text{算術平均數} = \bar{x} = \frac{25 \times 2 + 35 \times 8 + 45 \times 16 + 55 \times 10 + 65 \times 4}{40} = 46.5 \text{ 分} \#$$

$$(3) \text{標準差} = \sigma = \sqrt{\frac{25^2 \times 2 + 35^2 \times 8 + 45^2 \times 16 + 55^2 \times 10 + 65^2 \times 4 - 40 \times 46.5^2}{40}}$$
$$= \sqrt{\frac{4110}{40}}$$
$$= \frac{\sqrt{411}}{2} \#$$