數學歸納法的精神：
①. 證明$n=1$時，敘述成立.
②. 假設$n=k$時敘述成立，**推得**$n=k+1$敘述成立.
由數學歸納法可知，敘述成立。

12.(1)

①. $n=1$時：$C_0^1+C_1^1=1+1=2=2^1$ ，成立.

②. 設$n=k$時成立,即$C_0^k+C_1^k+\cdots+C_k^k=2^k$ (※)成立

則$n=k+1$時,

$C_0^{k+1}+C_1^{k+1}+C_2^{k+1}\cdots+C_{k-1}^{k+1}+C_k^{k+1}+C_{k+1}^{k+1}$

$=C_0^k+\left(C_0^k+C_1^k\right)+\left(C_1^k+C_2^k\right)+\cdots+\left(C_{k-2}^k+C_{k-1}^k\right)+\left(C_{k-1}^k+C_k^k\right)+C_k^k$ ←由巴斯卡定理可知

$=2\left(C_0^k+C_1^k+\ldots+C_{k-1}^k+C_k^k\right)$

$=2\times 2^k$ ←由(※)可知
$=2^{k+1}$ ，成立.

由數學歸納法得知，$C_0^n+C_1^n+\cdots+C_n^n=2^n$ #

12.(2)
①. $n=1$時：$C_1^1=1=1\times 2^0=1\times 2^{1-1}$ ，成立.

②. 設$n=k$時成立,即$C_1^k+2C_2^k+\cdots+kC_k^k=k\times 2^{k-1}$ (∗)成立

則$n=k+1$時,

$C_1^{k+1}+2C_2^{k+1}+3C_3^{k+1}\cdots+kC_k^{k+1}+(k+1)C_{k+1}^{k+1}$

$=\left(C_0^k+C_1^k\right)+2\left(C_1^k+C_2^k\right)+3\left(C_2^k+C_3^k\right)\cdots+k\left(C_{k-1}^k+C_k^k\right)+(k+1)C_k^k$ ←由巴斯卡定理可知

$=\left[C_0^k+2C_1^k+3C_2^k\cdots+kC_{k-1}^k+(k+1)C_k^k\right]+\left[C_1^k+2C_2^k+3C_3^k\cdots+kC_k^k\right]$ ←把括號的前後分開

(把左邊的括號拆成兩項,如下)

$=\left[C_0^k+C_1^k+C_2^k\cdots+C_{k-1}^k+C_k^k\right]+\left[0C_0^k+1C_1^k+2C_2^k\cdots+(k-1)C_{k-1}^k+kC_k^k\right]+\left[C_1^k+2C_2^k+3C_3^k\cdots+kC_k^k\right]$

$=\left[C_0^k+C_1^k+C_2^k\cdots+C_{k-1}^k+C_k^k\right]+2\left[C_1^k+2C_2^k+3C_3^k\cdots+kC_k^k\right]$

$=2^k+2\times\left(k\times 2^{k-1}\right)$ ←由 12(1)的結果跟(∗)可知
$=2^k+k\times 2^k=(k+1)2^k=(k+1)2^{(k+1)-1}$, 成立.

由數學歸納法得知，$C_1^n+2C_2^n+\cdots+nC_n^n=n\times 2^{n-1}$ #