

## 2-3 小考 2 參考解法

### 一、填充題：

1.

$$x^2y^2 \text{ 項} : C_2^4 x^2 (3y)^2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} x^2 \times 9y^2 = 54x^2y^2$$

所以  $x^2y^2$  項的係數 = 54 #

2.

$(x-2)^3(x+1)^5$  如何提供  $x^7$  項？

A. 分別提供： $x^2$  項、 $x^5$  項

B. 或分別提供： $x^3$  項、 $x^4$  項

$$\text{由 A 得到的 } x^7 \text{ 項} : C_2^3 x^2 (-2) \times C_5^5 x^5 = (-6x^2) \times (x^5) = -6x^7$$

$$\text{由 B 得到的 } x^7 \text{ 項} : C_3^3 x^3 \times C_4^5 x^4 \cdot 1 = (x^3) \times (5x^4) = 5x^7$$

$$\text{所以全部所提供的 } x^7 \text{ 項} : -6x^7 + 5x^7 = -x^7$$

所以  $x^7$  項的係數 = -1 #

3.

$$\left(ax - \frac{1}{x^2}\right)^9 = (ax - x^{-2})^9$$

$$\text{所以某一項} : C_n^9 (ax)^n (-x^{-2})^{9-n}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \\ \text{提供} : & x^n & x^{-2(9-n)} \end{array} \quad \rightarrow \text{共提供 } x^{n-2(9-n)} = x^{3n-18}$$

題目給我們常數項，即  $x^0$  項，所以  $3n-18=0 \Rightarrow n=6$

$$\text{所以常數項} : C_6^9 (ax)^6 (-x^{-2})^3 = C_6^9 a^6 x^6 (-x^{-6}) = -C_6^9 a^6 = -\frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} a^6 = -84a^6$$

題目說常數項 = -5376，所以  $-84a^6 = -5376 \Rightarrow a^6 = 64a \Rightarrow a = \pm 2$  #

4.

由二項式定理可知：

$$\begin{aligned} (2x+x^2)^n &= C_0^n (2x)^n (x^2)^0 + C_1^n (2x)^{n-1} (x^2)^1 + \dots + C_{n-1}^n (2x)^1 (x^2)^{n-1} + C_n^n (2x)^0 (x^2)^n \\ &= C_0^n 2^n x^n + C_1^n 2^{n-1} x^{n+1} + \dots + C_{n-1}^n 2^1 x^{2n-1} + C_n^n x^0 x^{2n} \end{aligned}$$

$$\text{所以 } a_4 = C_4^n 2^{n-4} \text{ 、 } a_5 = C_5^n 2^{n-5}$$

題目說： $a_4 : a_5 = 5 : 6$

$$\text{所以： } C_4^n 2^{n-4} : C_5^n 2^{n-5} = 5 : 6 \Rightarrow \frac{n!}{4!(n-4)!} 2^{n-4} : \frac{n!}{5!(n-5)!} 2^{n-5} = 5 : 6$$

$$\text{內項積} = \text{外項積} : 5 \frac{n!}{5!(n-5)!} \times 2^{n-5} = 6 \frac{n!}{4!(n-4)!} \times 2^{n-4}$$

$$\text{兩邊同乘 } \frac{5!(n-4)!}{n! \times 2^{n-5}} \text{ 得： } 5(n-4) = 6 \times 5 \times 2 \Rightarrow n-4 = 12 \Rightarrow n = 16 \text{ \#}$$

5.

$$\begin{aligned} 11^{11} &= (10+1)^{11} = C_{11}^{11} \times 10^{11} \times 1^0 + C_{10}^{11} \times 10^{10} \times 1^1 + \dots + C_2^{11} \times 10^2 \times 1^9 + C_1^{11} \times 10^1 \times 1^{10} + C_0^{11} \times 10^0 \times 1^{11} \\ &= C_{11}^{11} \times 10^{11} \times 1^0 + C_{10}^{11} \times 10^{10} \times 1^1 + \dots + 5500 + 110 + 1 \\ &= C_{11}^{11} \times 10^{11} \times 1^0 + C_{10}^{11} \times 10^{10} \times 1^1 + \dots + 5611 \end{aligned}$$

所以 $11^{11}$ 的末三位是611 #

6.

$$(1.01)^6 = (1+0.01)^6 = C_6^6 + C_5^6 \times 0.01 + C_4^6 \times 0.01^2 + C_3^6 \times 0.01^3 + C_2^6 \times 0.01^4 + \dots$$

└ \_\_\_\_\_ (之後的太小可以忽略)

$$= 1 + 6 \times 0.01 + 15 \times 0.0001 + 20 \times 0.000001$$

$$= 1 + 0.06 + 0.0015 + 0.00002$$

$$= 1.06152$$

$$\doteq 1.062$$

Ans: 1.062 #

7.

思考：如何取到 $x^9$ 項？

答：取 $(x^3)^3$

$$\text{題目： } (1+x^3) + (1+x^3)^2 + (1+x^3)^3 + (1+x^3)^4 + \dots + (1+x^3)^{10}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\text{提供 } (x^3)^3 \text{ 的係數： } 0 + 0 + C_3^3 + C_3^4 + \dots + C_3^{10}$$

$$= C_3^3 + C_3^4 + \dots + C_3^{10} = C_4^{11} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 330 \text{ \#}$$

8.

$$(1+2x-x^2)^6 = (1+2x-x^2)(1+2x-x^2)(1+2x-x^2)(1+2x-x^2)(1+2x-x^2)(1+2x-x^2)$$

思考：展開後的每一項是怎麼來的？

答：每個括弧都選一個東西出來然後乘起來。

由上面的思考，我們可知道要求  $x^6$  的係數，

我們可以先思考如何從 6 個括弧各找出一個東西然後乘起來是  $x^6$ ，  
最後把所有情況的係數加起來就是答案。

如何從 6 個括弧各找出一個東西然後乘起來是  $x^6$ ？

A.  $-x^2$ 、 $-x^2$ 、 $-x^2$ 、 $1$ 、 $1$ 、 $1$ ：係數為  $C_3^6 C_3^3 \times (-1)^3 = -20$

$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \uparrow & -x^2 \text{ 提供的係數} \end{array}$

6 個括弧選 3 個出來放  $-x^2$ ，剩下 3 個括弧選 3 個放 1

B.  $-x^2$ 、 $-x^2$ 、 $2x$ 、 $2x$ 、 $1$ 、 $1$ ：係數為  $C_2^6 C_2^4 C_2^2 \times (-1)^2 (2)^2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 1 \times 4 = 360$

$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \uparrow & \uparrow & 2x \text{ 提供的係數} \\ \uparrow & -x^2 \text{ 提供的係數} & \end{array}$

6 個括弧選 2 個出來放  $-x^2$ ，4 個括弧選 2 個出來放  $2x$ ，剩下 2 個括弧選 2 個放 1

C.  $-x^2$ 、 $2x$ 、 $2x$ 、 $2x$ 、 $2x$ 、 $1$ ：係數為  $C_1^6 C_4^5 C_1^1 \times (-1)(2)^4 = 6 \times 5 \times (-1) \times 16 = -480$

$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \uparrow & \uparrow & 2x \text{ 提供的係數} \\ \uparrow & -x^2 \text{ 提供的係數} & \end{array}$

6 個括弧選 1 個出來放  $-x^2$ ，5 個括弧選 4 個出來放  $2x$ ，剩下 1 個括弧選 1 個放 1

D.  $2x$ 、 $2x$ 、 $2x$ 、 $2x$ 、 $2x$ 、 $2x$ ：係數為  $C_6^6 (2)^6 = 64$

$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \uparrow & 2x \text{ 提供的係數} \end{array}$

6 個括弧選 6 個出來放  $2x$

所以  $x^6$  的係數為： $-20 + 360 - 480 + 64 = -76$  #

9.

$$C_0^n - \frac{1}{2}C_1^n + \left(\frac{1}{2}\right)^2 C_2^n - \left(\frac{1}{2}\right)^3 C_3^n + \cdots + \left(\frac{-1}{2}\right)^n C_n^n = C_0^n 1^n \left(-\frac{1}{2}\right)^0 + C_1^n 1^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \cdots + C_n^n 1^0 \left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

看到  $C_0^n$ 、 $C_1^n$ 、 $\dots$ 、 $C_n^n$ ，要聯想到二項式定理

二項式定理  $:(x+y)^n = C_0^n x^n y^0 + C_1^n x^{n-1} y + \cdots + C_{n-1}^n x y^{n-1} + C_n^n x^0 y^n$

$x=1, y=-\frac{1}{2}$  代入： $\left(1-\frac{1}{2}\right)^n = C_0^n 1^n \left(-\frac{1}{2}\right)^0 + C_1^n 1^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \cdots + C_n^n 1^0 \left(\frac{-1}{2}\right)^n$

所以  $\left(\frac{1}{2}\right)^n = C_0^n - \frac{1}{2}C_1^n + \left(\frac{1}{2}\right)^2 C_2^n - \left(\frac{1}{2}\right)^3 C_3^n + \cdots + \left(\frac{-1}{2}\right)^n C_n^n$

題目說  $C_0^n - \frac{1}{2}C_1^n + \left(\frac{1}{2}\right)^2 C_2^n - \left(\frac{1}{2}\right)^3 C_3^n + \cdots + \left(\frac{-1}{2}\right)^n C_n^n < \frac{1}{2500}$

所以  $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{2500} \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2500}$

兩邊取倒數： $2^n > 2500$

因為  $2^{10} = 1024$ 、 $2^{11} = 2048$ 、 $2^{12} = 4096$

所以  $n = 12$  #

ps:  $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{2500}$  之後也可以兩邊取  $\log$ ，詳細方法回去翻書囉！

10.

$$\begin{aligned} x^{50} - 2x^2 + 3 &= [(x-1)+1]^{50} - 2x^2 + 3 = [C_{50}^{50}(x-1)^{50} + C_{49}^{50}(x-1)^{49} + \cdots + C_2^{50}(x-1)^2 + C_1^{50}(x-1)^1 + C_0^{50}] - 2x^2 + 3 \\ &= (x-1)^2 Q(x) + 50(x-1) + 1 - 2x^2 + 3 = (x-1)^2 Q(x) - 2x^2 + 50x - 46 \end{aligned}$$

注意：餘式的次方要比除式小！！

$-2x^2 + 50x - 46 = (x-1)^2(-2) + 46x - 44$  ←直接除得到的結果

$x^{50} - 2x^2 + 3 = (x-1)^2 Q(x) + (x-1)^2(-2) + 46x - 44 = (x-1)^2 [Q(x) - 2] + 46x - 44$

所以餘式 =  $46x - 44$  #

思考： $(x+y)^n$  有多少個項？

答：由二項式定理  $(x+y)^n = C_n^n x^n y^0 + C_{n-1}^n x^{n-1} y^1 + \dots + C_1^n x^1 y^{n-1} + C_0^n x^0 y^n$

※有三種思考的方法

(a) 從係數是  $C_n^n$ 、 $C_{n-1}^n$ 、 $\dots$ 、 $C_1^n$ 、 $C_0^n$  可得知，總共有  $n+1$  個相異項。

(b) 從  $x$  的次方來看， $x^n$ 、 $x^{n-1}$ 、 $\dots$ 、 $x^1$ 、 $x^0$  可得知，總共有  $n+1$  個相異項。

(c) 從  $y$  次方來看， $y^0$ 、 $y^1$ 、 $\dots$ 、 $y^{n-1}$ 、 $y^n$  可得知，總共有  $n+1$  個相異項。

(1) 題目要求  $[a+(b-c)^2]^5$  有多少個相異項，不妨用二項式定理展開來看。

$$\begin{aligned} [a+(b-c)^2]^5 &= C_5^5 a^5 + C_4^5 a^4 [(b-c)^2]^1 + C_3^5 a^3 [(b-c)^2]^2 + C_2^5 a^2 [(b-c)^2]^3 + C_1^5 a^1 [(b-c)^2]^4 + C_0^5 [(b-c)^2]^5 \\ &= C_5^5 a^5 + C_4^5 a^4 (b-c)^2 + C_3^5 a^3 (b-c)^4 + C_2^5 a^2 (b-c)^6 + C_1^5 a^1 (b-c)^8 + C_0^5 (b-c)^{10} \end{aligned}$$

思考：有  $a^5$  的項，必跟有  $a^4$  的項為不同項

$C_5^5 a^5$  提供 1 個相異項， $C_4^5 a^4 (b-c)^2$  提供 3 個相異項， $C_3^5 a^3 (b-c)^4$  提供 5 個相異項，

$\dots C_0^5 (b-c)^{10}$  提供 11 個相異項

所以總共提供了  $1+3+5+7+9+11 = \frac{(1+11) \times 6}{2} = 36$  個相異項 #

(2) 哪項提供了  $a^2 b^3 c^3$  項？ $C_2^5 a^2 (b-c)^6$  中，取 3 個  $b$  跟 3 個  $-c$

$$\text{所以 } a^2 b^3 c^3 : C_2^5 a^2 C_3^6 b^3 (-c)^3 = -C_2^5 C_3^6 a^2 b^3 c^3 = -\frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} a^2 b^3 c^3 = -200 a^2 b^3 c^3$$

所以  $a^2 b^3 c^3$  的係數 = -200 #

## 二、計算題：

12.

(1)要證  $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n = 2^n$

看到  $C_0^n$ 、 $C_1^n$ 、 $\cdots$ 、 $C_n^n$  要聯想到二項式定理。

二項式定理  $:(x+y)^n = C_0^n x^n y^0 + C_1^n x^{n-1} y + \cdots + C_{n-1}^n x y^{n-1} + C_n^n x^0 y^n$

$x=1, y=1$  代入： $(1+1)^n = C_0^n \times 1^n \times 1^0 + C_1^n \times 1^{n-1} \times 1 + \cdots + C_{n-1}^n \times 1 \times 1^{n-1} + C_n^n \times 1^0 \times 1^n$

所以  $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n = 2^n$  得證 #

(2)要證  $C_1^n + 2C_2^n + 3C_3^n + \cdots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$

要聯想到，這是個題組，而第(1)小題有  $C_0^n$  這項，所以這邊要把他補進來，又要不影響他的數字，所以就補 0

$$C_1^n + 2C_2^n + 3C_3^n + \cdots + nC_n^n = 0C_0^n + C_1^n + 2C_2^n + 3C_3^n + \cdots + nC_n^n$$

令  $S = 0C_0^n + C_1^n + 2C_2^n + \cdots + (n-1)C_{n-1}^n + nC_n^n$

↓   ↓   ↓   ↓   ↓

※※利用  $C_a^n = C_{n-a}^n$

$$S = 0C_n^n + C_{n-1}^n + 2C_{n-2}^n + \cdots + (n-1)C_1^n + nC_0^n$$

$$= nC_0^n + (n-1)C_1^n + (n-2)C_2^n + \cdots + 0C_n^n$$

所以  $S = 0C_0^n + C_1^n + 2C_2^n + \cdots + (n-1)C_{n-1}^n + nC_n^n$

又  $S = nC_0^n + (n-1)C_1^n + (n-2)C_2^n + \cdots + 0C_n^n$

兩式相加： $2S = nC_0^n + nC_1^n + nC_2^n + \cdots + nC_n^n = n(C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n) = n \cdot 2^n$

↑  
由第(1)小題得知

所以  $S = n \cdot 2^{n-1} \Rightarrow C_1^n + 2C_2^n + 3C_3^n + \cdots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$  得證 #