2-3 小考 1 參考解法

1.

(a). $(2a+3b)^4=C_4^4(2a)^4+C_3^4(2a)^3(3b)+C_2^4(2a)^2(3b)^2+C_1^4(2a)(3b)^3+C_0^4(3b)^4$

$=16a^4+4\times 8a^3\times 3b+6\times 4a^2\times 9b^2+4\times 2a\times 27b^3+81b^4$

$=16a^4+96a^3b+216a^2b^2+216ab^3+81b^4$ #

(b) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^5=C_5^5x^5+C_4^5x^4\left(-\frac{1}{x}\right)+C_3^5x^3\left(-\frac{1}{x}\right)^2+C_2^5x^2\left(-\frac{1}{x}\right)^3+C_1^5x\left(-\frac{1}{x}\right)^4+C_0^5\left(-\frac{1}{x}\right)^5$

$=x^5+5\times x^4\times\left(-\frac{1}{x}\right)+10\times x^3\times\frac{1}{x^2}+10\times x^2\times\left(-\frac{1}{x^3}\right)+5\times x\times\frac{1}{x^4}+\left(-\frac{1}{x^5}\right)$

$=x^5-5x^3+10x-\frac{10}{x}+\frac{5}{x^3}-\frac{1}{x^5}$ #

2.

$C_{18}^{19}+C_{17}^{18}+\cdots+C_1^2+C_0^1=C_0^1+C_1^2+\cdots+C_{17}^{18}+C_{18}^{19}=C_{18}^{20}=190$ #

↓ (從右排到左)　　↓ (參考 2-3 重點整理的 b 的記憶法)

3.

$C_{10}^{10}+C_9^{10}+\cdots+C_1^{10}+C_0^{10}=C_0^{10}+C_1^{10}+\cdots+C_9^{10}+C_{10}^{10}$ ——→聯想到二項式定理.

↓ (從右排到左)

二項式定理：$(x+y)^n=C_0^nx^ny^0+C_1^nx^{n-1}y+\cdots+C_{n-1}^nxy^{n-1}+C_n^nx^0y^n$

$x=1,y=1,n=10$ 代入：$(1+1)^{10}=C_0^{10}+C_1^{10}+\cdots+C_9^{10}+C_{10}^{10}$

$\therefore C_{10}^{10}+C_9^{10}+\cdots+C_1^{10}+C_0^{10}=2^{10}=1024$ #

4.

$(x^2-2x-1)^{10}=[(x^2-2x+1-1)-1]^{10}=[(x-1)^2-2]^{10}$

$=C_{10}^{10}[(x-1)^2]^{10}+C_9^{10}[(x-1)^2]^9(-2)+\cdots+C_1^{10}[(x-1)^2]^1(-2)^9+C_0^{10}(-2)^{10}$

$=(x-1)^2Q(x)+2^{10}$ →把 $(x-1)^2$ 提出來的結果.

$\therefore$ 餘式 $=2^{10}=1024$ #

5.

$$1-\frac{2}{3}C_1^n+\frac{4}{9}C_2^n-\cdots+\left(-\frac{2}{3}\right)^n C_n^n<\frac{1}{400}$$

$$\Rightarrow C_0^n 1^n\left(-\frac{2}{3}\right)^0+C_1^n 1^{n-1}\left(-\frac{2}{3}\right)^1+C_2^n 1^{n-2}\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+C_n^n 1^0\left(-\frac{2}{3}\right)^n<\frac{1}{400}$$ →聯想到二項式定理

二項式定理	：$(x+y)^n=C_0^n x^n y^0+C_1^n x^{n-1}y+\cdots+C_{n-1}^n xy^{n-1}+C_n^n x^0 y^n$
$x=1,y=-\frac{2}{3}$ 代入	：$\left(1-\frac{2}{3}\right)^n=C_0^n 1^n\left(-\frac{2}{3}\right)^0+C_1^n 1^{n-1}\left(-\frac{2}{3}\right)^1+\cdots+C_n^n 1^0\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^n<\frac{1}{400}\Rightarrow\frac{1}{3^n}<\frac{1}{400}\Rightarrow 3^n>400$$ →相同分子的分數，分母越大，整個值越小。

$\because\ 3^4=81\quad 3^5=243\quad 3^6=729$

$\therefore n=6$ #

6.

$$\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{4x}\right)^{12}=\left(2\sqrt{x}-4x^{-1}\right)^{12}=C_{12}^{12}\left(2\sqrt{x}\right)^{12}+C_{11}^{12}\left(2\sqrt{x}\right)^{11}\left(-4x^{-1}\right)+\cdots+C_1^{12}\left(2\sqrt{x}\right)\left(-4x^{-1}\right)^{11}+C_0^{12}\left(-4x^{-1}\right)^{12}$$

某一項：$C_a^{12}\left(2\sqrt{x}\right)^a\left(-\frac{1}{4}x^{-1}\right)^{12-a}$

↓ ↓

提供： $x^{\frac{1}{2}a}$ $x^{(-1)(12-a)}$ →共提供 $x^{\frac{1}{2}a+(-1)(12-a)}$

要求常數項，即求 x^0 項，所以 $x^{\frac{1}{2}a+(-1)(12-a)}=x^0\Rightarrow\frac{1}{2}a+(-1)(12-a)=0\Rightarrow\frac{3}{2}a-12=0\Rightarrow a=8$

所以常數項=$C_8^{12}\left(2\sqrt{x}\right)^8\left(-\frac{1}{4}x^{-1}\right)^4=\frac{12\times 11\times 10\times 9}{4\times 3\times 2\times 1}\times 2^8\times x^4\times\frac{1}{4^4}x^{-4}=495$ #

7.

$$(1+x)^n = C_0^n + C_1^n x + \cdots + C_{n-1}^n x^{n-1} + C_n^n x^n$$

第一項係數：C_0^n　　第二項係數：C_1^n　　第三項係數：C_2^n　　$\cdots$　　發現第 x 項係數為 C_{x-1}^n

$\therefore$ 第五項係數：C_4^n　　第六項係數：C_5^n　　第七項係數：C_6^n

由題目知，第五項、第六項係數成等差

$\therefore$ C_4^n 、C_5^n 、C_6^n ：等差

$\because$ 等差數列的公差=後面那項-前面那項

$\therefore$ 公差=$C_5^n - C_4^n$ ，且公差=$C_6^n - C_5^n$

$$\therefore C_5^n - C_4^n = C_6^n - C_5^n \Rightarrow 2C_5^n = C_4^n + C_6^n \Rightarrow 2\frac{n!}{5!(n-5)!} = \frac{n!}{4!(n-4)!} + \frac{n!}{6!(n-6)!}$$

兩邊約掉 $n!$，然後同乘 $6!(n-4)!$　　$\rightarrow$同乘的地方要同乘最大的，才會變成整數。

得到，$2\times 6\times (n-4) = 6\times 5 + (n-4)(n-5)$

$\Rightarrow 12n - 48 = 30 + n^2 - 9n + 20 \Rightarrow n^2 - 21n + 98 = 0 \Rightarrow (n-7)(n-14) = 0$

$\Rightarrow n = 7$ (不合，$\because$ 題目說 $n > 9$)　or　$n = 14$

$\therefore n = 14$

※※※※※看清楚題目要求的是※※※※※

題目要求：x^{12} 的係數。

將剛剛算出的 $n=14$ 代入 $(1+x)^n = (1+x)^{14}$

$$\therefore x^{12}\text{的係數} = C_{12}^{14} = \frac{14\times 13}{2\times 1} = 91 \quad \#$$

8.

$$f(x) = x^{30} - 4x + 1 = [(x-1)+1]^{30} - 4x + 1 = C_{30}^{30}(x-1)^{30} + C_{29}^{30}(x-1)^{29} + \cdots + C_1^{30}(x-1) + C_0^{30} - 4x + 1$$

$$= (x-1)^2 Q(x) + 30x - 30 + 1 - 4x + 1 = (x-1)^2 Q(x) + 26x - 28$$

$\therefore$ 餘式 $= 26x - 28$

$\therefore a = 26, b = 28$　#

9.

$$123^7=(11\times 11+2)^7=(121+2)^7=C_7^7\times 121^7+C_6^7\times 121^6\times 2+\cdots+C_1^7\times 121\times 2^6+C_0^7\times 2^7$$

$$=11A+C_0^7\times 2^7=11A+128=11A+11\times 11+7=11(A+11)+7$$

$\therefore$ 餘數 $=7$ #

※注意：餘數要比除數小!!

10.

$\boxed{\text{參考講義 p13 的第 7 題解法}}$

收盤價 $=500\times(1-0.06)^{10}(1+0.06)^{10}=500\times[(1-0.06)(1+0.06)]^{10}=500\times\left[1-(0.06)^2\right]^{10}$

$$=500\times(1-0.0036)^{10}$$

$$=500\times\left[C_{10}^{10}+C_9^{10}(-0.0036)+C_8^{10}(-0.0036)^2+\cdots+C_1^{10}(-0.0036)^9+C_0^{10}(-0.0036)^{10}\right]$$

$$\fallingdotseq 500\times\left[C_{10}^{10}+10\times(-0.0036)+45\times(-0.0036)^2\right]$$ →後面的太小所以忽略了!!

$$=500\times(1-0.036+0.0005832)$$
$$=500\times(0.9645832)$$
$$=482.2916$$
$$\fallingdotseq 482$$

Ans：482 #