<吳水利老師編 2-3 講義>之作業參考解法

＜ P.8 ＞

1. 直接使用 p.7 巴斯卡推廣 2

$$C_0^1+C_1^2+\ldots+C_{27}^{28}+C_{28}^{29}$$

$$=C_{28}^{30} = 435 \ \#$$

＊巴斯卡推廣 2 的記憶法：

①. 第一項為 C_0^a

②. $C_0^a+C_1^{a+1}+\ldots+C_r^{a+r}$ 之中，

每一項皆為前一項上下都+1

③. 結果為最後一項的上面+1，下面不變，

即 $C_0^a+C_1^{a+1}+\ldots+C_r^{a+r}=C_r^{a+r+1}$

4.先算 $C_{k-1}^k+C_{k-2}^{k-1}+\ldots+C_1^2+C_0^1$

※同學自行練習算出上式。

可得 $C_{k-1}^k+C_{k-2}^{k-1}+\ldots+C_1^2+C_0^1 = C_{k-1}^{k+1} = \dfrac{(k+1)!}{(k-1)!2!} = \dfrac{(k+1)k}{2\times 1}$

由題目 $C_{k-1}^k+C_{k-2}^{k-1}+\ldots+C_1^2+C_0^1=190$

$\therefore \dfrac{(k+1)k}{2}=190 \Rightarrow (k+1)k=380 \Rightarrow k^2+k-380=0$

$\Rightarrow (k-19)(k+20)=0 \Rightarrow k=19$ or $k=-20$ (負不合)

$\therefore k=19$ #

5. 直接使用 p.6 巴斯卡推廣 1

$$C_3^3+C_3^4+\ldots+C_3^9+C_3^{10}$$

$$=C_4^{11} \ \#$$

＊巴斯卡推廣 1 的記憶法：

①. 第一項為 C_a^a

②. $C_a^a+C_a^{a+1}+\ldots+C_a^{a+r}$ 之中，

每一項皆為前一項上面+1，下面不變。

③. 結果為最後一項上下都+1，

即 $C_a^a+C_a^{a+1}+\ldots+C_a^{a+r}=C_{a+1}^{a+r+1}$

< P.10 >

範例 5

(a)先展開 $\left(\dfrac{2}{3x}-2x^2\right)^{12} = C_{12}^{12}\left(\dfrac{2}{3x}\right)^{12}+C_{11}^{12}\left(\dfrac{2}{3x}\right)^{11}\left(-2x^2\right)+\ldots+C_{1}^{12}\left(\dfrac{2}{3x}\right)^{1}\left(-2x^2\right)^{11}+C_{0}^{12}\left(-2x^2\right)^{12}$

$$= C_{12}^{12}\left(\frac{2}{3}x^{-1}\right)^{12}+C_{11}^{12}\left(\frac{2}{3}x^{-1}\right)^{11}\left(-2x^2\right)+\ldots+C_{1}^{12}\left(\frac{2}{3}x^{-1}\right)^{1}\left(-2x^2\right)^{11}+C_{0}^{12}\left(-2x^2\right)^{12}$$

考慮展開後的某一項爲：$C_a^{12}\left(\dfrac{2}{3}x^{-1}\right)^{a}\left(-2x^2\right)^{12-a}$

↓ ↓

提供 x^{-a} $x^{2(12-a)}$

所以這一向只考慮 x 的部份，就是 $x^{-a}\ x^{2(12-a)}=x^{-a+2(12-a)}=x^{24-3a}$

假設 x^{10} 存在，則有個 a 滿足 $x^{24-3a}=x^{10}$ ，即 $24-3a=10$

$\Rightarrow\ 3a=14\ \Rightarrow\ a=\dfrac{14}{3}$ (不合，因爲項數不會有分數)

$\therefore$ 否 #

(b)同學可利用與(a)小題相同的方法，即可算出 $a=1$ (表示 x^{21} 項存在)

則 x^{21} 項就是把 a 代 1 的那項，

即 $C_1^{12}\left(\dfrac{2}{3}x^{-1}\right)^{1}\left(-2x^2\right)^{11} = 12\times\dfrac{2}{3}x^{-1}\times\left(-2^{11}\right)x^{22} = -2^{14}x^{21}$

$\therefore$ x^{21} 項存在，且係數爲 -2^{14} #

(c)由第(a)小題知道：

$$\left(\frac{2}{3x}-2x^2\right)^{12} = C_{12}^{12}\left(\frac{2}{3}x^{-1}\right)^{12}+C_{11}^{12}\left(\frac{2}{3}x^{-1}\right)^{11}\left(-2x^2\right)+\ldots+C_{1}^{12}\left(\frac{2}{3}x^{-1}\right)^{1}\left(-2x^2\right)^{11}+C_{0}^{12}\left(-2x^2\right)^{12}$$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

x^{-12} x^{0} x^{-11} x^{2} x^{-1} x^{22} x^{0} x^{22}

由 C_{12}^{12} 、 C_{11}^{12} 、⋯、 C_{1}^{12} 、 C_{0}^{12} 可知一共有 13 項，則中間項即爲第七項。

第一項的 x 次方爲：-12+0

第二項的 x 次方爲：-11+2

第三項的 x 次方爲：-10+4

以此類推，可以得知 x 的次方即爲首項 $=-12$ ，公差爲 3 的等差數列。

$\therefore$ 第七項 $= a_7 = -12+3(7-1) = 6$ #

(d)考慮一般的多項式 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_1 x + a_0$，

則 $f(x)$ 的各項細數和 ＝ $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$，恰好等於 $f(1)$

如今，$\left(\frac{2}{3x}-2x^2\right)^{12}$ 展開後也是一個多項式，

所以要求各項係數的和，則把 $x=1$ 代入即可。

所以各項係數和 ＝ $\left(\frac{2}{3\times 1}-2\times 1^2\right)^{12}$ ＝ $\left(\frac{2}{3}-2\right)^{12}$ ＝ $\left(-\frac{4}{3}\right)^{12}$ ＝ $\left(\frac{4}{3}\right)^{12}$ #

範例 6：

思考：
如果能將 $f(x)$ 寫成 $f(x)=(x+1)^2 Q(x)+r(x)$，$r(x)=ax+b$
則 $f(x) \div (x+1)^2 = Q(x) \cdots r(x)$
所以餘式 ＝ $r(x)$

所以一開始就想要把 $(x^2+2x)^{10}$ 寫成 $(x+1)^2$ 的倍數再加上一個小於二次的多項式。

所以就先考慮 x^2+2x 與 $(x+1)^2$ 的關係，發現 $x^2+2x+1 = (x+1)^2$

所以改寫 $(x^2+2x)^{10} = \left[(x^2+2x+1)-1\right]^{10} = \left[(x+1)^2-1\right]^{10}$

$$= C_{10}^{10}\left[(x+1)^2\right]^{10} + C_9^{10}\left[(x+1)^2\right]^9(-1)+\ldots+C_1^{10}\left[(x+1)^2\right]^1(-1)^{11}+C_0^{12}(-1)^{12}$$

$$=(x+1)^2\,Q(x)\ +1$$

所以餘式 ＝1 #

＜ P.12 ＞

2. $(0.94)^4 = (1-0.06)^4$

$$= C_4^4\times 1^4 + C_3^4\times 1^3\times(-0.06)+C_2^4\times 1^2\times(-0.06)^2+C_1^4\times 1\times(-0.06)^3+C_0^4\times(-0.06)^4$$

因爲近似到小數第二位，所以可以忽略 $C_1^4\times 1\times(-0.06)^3+C_0^4\times(-0.06)^4$

≒ $1-4\times 0.06+6\times 0.0036 = 1-0.24+0.0216 = 0.7816$

≒ 0.78 #

4. $(1+x)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \ldots + C_{n-0}^n x^{n-1} + C_n^n x^n$

觀察可得知，第一項係數 = C_0^n ， 第二項係數 = C_1^n ， 以此類推。

所以，第五項係數 = C_4^n ，第六項係數 = C_5^n ， 第七項係數 = C_6^n

由題目知C_4^n 、 C_5^n 、 C_6^n 成等差，等差數列中的連續兩項的差即為公差

所以，$C_5^n - C_4^n = C_6^n - C_5^n \Rightarrow 2C_5^n = C_4^n + C_6^n \Rightarrow 2\dfrac{n!}{5!(n-5)!} = \dfrac{n!}{4!(n-4)!} + \dfrac{n!}{6!(n-6)!}$

兩邊約掉$n!$ ，然後同乘 $6!(n-4)!$

得到， $2\times 6\times (n-4) = 6\times 5 + (n-4)(n-5)$

化簡之後得，$n^2 - 21n + 98 = 0 \Rightarrow (n-7)(n-14) = 0 \Rightarrow n = 7$ or $n = 14$ #

5. $(1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \cdots + (1+x)^{10}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

x^2係數 = $0 + C_2^2 + C_2^3 + \cdots + C_2^{10}$

(使用巴斯卡推廣 1 可得)

$= C_3^{11} = 165$ #

6. $(1+x+x^2)^4$

思考： 考慮$(1+x+x^2)^4 = (1+x+x^2)(1+x+x^2)(1+x+x^2)(1+x+x^2)$， 我們會發現只要是四次方，寫開來之後就會有四個括弧， 根據分配律，我們會發現每一個括弧都要取一個出來，而且每個括弧都要取。 所以，我們要從1、x 、x^2三個當中選出總共 4 個東西

由上面的思考，再加上題目要求要算x^3係數，
所以就相當於題目是在問，怎麼從1、x 、x^2三個當中選出總共 4 個東西，然後乘起來 = x^3
分類：(分成有沒有x^2)

有x^2：1、1、x 、x^2 $\rightarrow$ 這樣取的係數 = 這 4 個物品的排列數 = $\dfrac{4!}{2!1!1!} = 12$

沒x^2：1、x 、x 、x $\rightarrow$ 這樣取的係數 = 這 4 個物品的排列數 = $\dfrac{4!}{1!3!} = 4$

所以$x^3 = 12 + 4 = 16$ #

< P.13 >

7.

先讀懂題意：

跌停等於跌 7%(=0.07)，也就是第二天的錢 = 第一天的錢扣掉第一天的錢×0.07

Ex：第一天收盤價 100 元，第二天跌停板收盤。

則第二天的收盤價 = 100 - 100×0.07 = $100(1-0.07)$ 習慣上提出來。

如果第二天跌停板收盤，第三天也跌停板收盤，則我們要先算出第二天的錢，才能算第三天的錢。

Ex：第一天收盤價 100 元，第二天跌停板收盤，第三天也跌停板收盤。

則第二天的收盤價 = $100(1-0.07)$

則第三天的收盤價 = $100(1-0.07)(1-0.07)$ = $100(1-0.07)^2$

依題意我們知道，某一天收盤價每股 40 元，然後連續跌停 5 天，再連續漲停 5 天。

所以十個交易日後的收盤價 = $40(1-0.07)^5(1+0.07)^5 = 40[(1-0.07)(1+0.07)]^5$

$= 40(1^2-0.07^2)^5 = 40(1-0.0049)^5$

$= 40(C_5^5 - C_4^5\times 0.0049 + C_3^5\times 0.0049^2 - C_2^5\times 0.0049^3 + C_1^5\times 0.0049^4 - C_0^5\times 0.0049^5)$

由選項可以得知，我們只要能算到小數點後第一位即可。

所以忽略 $40(C_3^5\times 0.0049^2 - C_2^5\times 0.0049^3 + C_1^5\times 0.0049^4 - C_0^5\times 0.0049^5)$

只考慮 $40(C_5^5 - C_4^5\times 0.0049)$

$\fallingdotseq 40(C_5^5 - C_4^5\times 0.0049) = 40(1-5\times 0.0049) = 40\times 0.9755 = 39.02$

$\fallingdotseq 39$

Ans：(1) #

10. 參考 p.12 第 6 題解法中的思考，然後做做看.

12. 參考 p.12 第 5 題的解法，然後做做看.

13. 參考 p.10 範例 5(a)小題的作法，然後思考當 $a=?$時，x 的次方爲 0 .

15. 參考 p.10 範例 6 的做法，然後做做看.

16. $x^p y^q$ 的係數，即爲 $C_p^n = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n!}{p!q!}$ #

可回顧講義 p.2 的說明。

17. $x^p y^q z^r$ 的係數，即爲 $C_p^n \times C_q^{n-p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} \times \dfrac{(n-p)!}{q!(n-p-q)!} = \dfrac{n!}{p!q!r!}$ #

↑

n 個取 p 個放 x ，$n-p$ 個取 q 個放 y