2-3 習作參考解法

基本題

1. (1)(2)

直接利用二項式定理展開。

2. $\left(2+\sqrt{3}\right)^4$

$=C_4^4 2^4+C_3^4 2^3\sqrt{3}+C_2^4 2^2\left(\sqrt{3}\right)^2+C_1^4 2\left(\sqrt{3}\right)^3+C_0^4\left(\sqrt{3}\right)^4$

$=16+32\sqrt{3}+72+24\sqrt{3}+9$

$=97+56\sqrt{3}$

$\therefore a=97, b=56$ #

3.

(1). x^5y^2 項：$C_5^7(2x)^5(3y)^2=\dfrac{7\times6}{2\times1}\times32x^5\times9y^2=6048x^5y^2$

$\therefore x^5y^2$項係數$=6048$ #

(2). x^6 項：$C_3^6\left(2x^2\right)^3(-5)^3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times8x^6\times(-125)=-20000x^6$

$\therefore x^6$項係數$=-20000$ #

4.

二項式定理：$(x+y)^n=C_0^n x^n+C_1^n x^{n-1}y+\cdots+C_{n-1}^n xy^n+C_n^n y^{\mathrm{n}}$

$x=1,\mathrm{y}=1$代入：$(1+1)^n=C_0^n+C_1^n+\cdots+C_{n-1}^n+C_n^n \Rightarrow C_1^n+C_2^n+\cdots+C_{n-1}^n+C_n^n=(1+1)^n-C_0^n=2^n-1$

由題目知：$2000<C_1^{\mathrm{n}}+\cdots+C_{\mathrm{n-1}}^{\mathrm{n}}+C_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}}<3000 \Rightarrow 2000<2^n-1<3000 \Rightarrow 2001<2^n<3001$

$\because 2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$

$\therefore n=11$ #

標準題

5.

$\left(2x^4-\dfrac{1}{x^3}\right)^7=\left(2x^4-x^{-3}\right)^7=C_0^7\left(2x^4\right)^7+C_1^7\left(2x^4\right)^6\left(-x^{-3}\right)+\cdots+C_6^7\left(2x^4\right)\left(-x^{-3}\right)^6+C_7^7\left(-x^{-3}\right)^7$

某一項：$C_a^7\left(2x^4\right)^a\left(-x^{-3}\right)^{7-a}$

↑ ↑

提供x^{4a} $x^{(-3)(7-a)}$ —→ 共提供$x^{4a+(-3)(7-a)}$

要求常數項，即$x^{4a+(-3)(7-a)}=x^0 \Rightarrow 4a+(-3)(7-a)=0 \Rightarrow 7a=21 \Rightarrow a=3$

所以常數項：$C_3^7\left(2x^4\right)^3\left(-x^{-3}\right)^4=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times8x^{12}\times x^{-12}=280$ #

6.

$x^{n-2}y^2$項：$C_{n-2}^{n}x^{n-2}(-2y)^2=\dfrac{n(n-1)}{2\times 1}\times x^{n-2}\times 4y^2=(2n^2-2n)x^{n-2}y^2$

所以，　$x^{n-2}y^2$項係數$=2n^2-2n$

由題目知：$x^{n-2}y^2$項係數$=264$

所以$2n^2-2n=264 \;\Rightarrow\; n^2-n=132 \;\Rightarrow\; n^2-n-132=0 \;\Rightarrow\; (n-12)(n+11)=0$

$\Rightarrow\; n=12$ or $n=-11$(因爲項數不會有負的,所以負不合)

Ans：$n=12$ #

7. .

由二項式定理知：$(x+1)^n=C_n^n x^n+C_{n-1}^n x^{n-1}+\cdots+C_1^n x+C_0^n$

由題目知　：$(x+1)^n=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$

所以$a_3=C_3^n=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2\times 1}$ ，$a_{n-6}=C_{n-6}^n=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}$

由題目知：　$a_3 : a_{n-6}=4:7$

所以　：　$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2\times 1}:\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}=4:7$

因爲內項積=外項積，所以$7\times\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2\times 1}=4\times\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}$

兩邊同乘$\dfrac{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{n(n-1)(n-2)}$，可得$7\times 6\times 5\times 4=4(n-3)(n-4)(n-5)$

$\Rightarrow\; (n-3)(n-4)(n-5)=7\times 6\times 5$

因爲$(n-3)$、$(n-4)$、$(n-5)$是連續的整數，而且$n-3>n-4>n-5$，所以$n-3=7$　(最大的等於最大的)

$\Rightarrow\; n=10$ #

8. .

$(1+x)^n=C_0^n x^0+C_1^n x+\cdots+C_{n-1}^n x^{n-1}+C_n^n x^n$

由觀察可知：x^0項係數$=C_0^n$ ，x^1項係數$=C_1^n$ ，$\cdots$ ，x^8項係數$=C_8^n$ ，x^9項係數$=C_9^n$ ，x^{10}項係數$=C_{10}^n$

因爲x^8、x^9、x^{10}項係數成等差數列，

所以$C_9^n-C_8^n=C_{10}^n-C_9^n \;\Rightarrow\; 2C_9^n=C_8^n+C_{10}^n \;\Rightarrow\; 2\dfrac{n!}{9!(n-9)!}=\dfrac{n!}{8!(n-8)}+\dfrac{n!}{10!(n-10)}$

兩邊同乘$\dfrac{10!(n-8)!}{n!}$，可得$2\times 10\times(n-8)=10\times 9+(n-8)(n-9) \;\Rightarrow\; 20n-160=90+n^2-17n+72$

$\Rightarrow\; n^2-37n+322=0 \;\Rightarrow\; (n-14)(n-23)=0 \;\Rightarrow\; n=14$ or $n=23$

9. .

$$f(x)=1+(x-1)+(x-1)^2+(\mathrm{x}-1)^3\cdots+(1-x)^{12}$$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

提供的x^2項係數： 0 0 $C_2^2(-1)^2$ $C_2^3(-1)^2\cdots C_2^{12}(-1)^2$

所以x^2項係數$=0+0+C_2^2(-1)^2+C_2^3(-1)^2+\cdots+C_2^{12}(-1)^2=C_2^2+C_2^3+\cdots C_2^{12}=C_3^{13}=\dfrac{13\times12\times11}{3\times2\times1}=286$

Ans：286 #

10.

$$f(x)=x^{15}+1=\left[(x+1)^2-1\right]^{15}+1=\left[C_{15}^{15}(x+1)^{15}+C_{14}^{15}(x+1)^{14}(-1)+\cdots+C_1^{15}(x+1)(-1)^{14}+C_0^{15}(-1)^{15}\right]+1$$

$$=f(x)=(x+1)^2Q(x)+C_1^{15}(x+1)(-1)^{14}+C_0^{15}(-1)^{15}+1$$
$$=(x+1)^2Q(x)+15x+15-1+1=(x+1)^2Q(x)+15x+15$$

Ans：$15x+15$ #

11. .

令$f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)$，

將$f(x)$展開，

則$f(x)=x^6+(1+2+3+4+5+6)x^5+(1\times2+1\times3+\cdots+1\times6+2\times3+2\times4+\cdots+2\times6+\cdots+5\times6)x^5+\cdots$

所以可以發現： $f(x)=x^6+S_1x^5+S_2x^4+S_3x^3+S_4x^2+S_5x+S_6$

令$x=1$代入 ：$f(1)=1^6+S_1\times1^5+S_2\times1^4+S_3\times1^3+S_4\times1^2+S_5\times1+S_6$

$=1+S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6$

$\Rightarrow S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6=f(1)-1$

又$f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)$

所以$f(1)=(1+1)(1+2)(1+3)(1+4)(1+5)(1+6)=2\times3\times4\times5\times6\times7=5040$

所以$S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6=5040-1=5039$ #

引導題

12.

(1). $0\sim9$ 選 2 個數字出來，然後不用排列，直接把大的放左邊，所以有 $C_2^{10}=45$ 個

(2). $0\sim9$ 選 3 個數字出來，然後不用排列，直接把大的放左邊，所以有 $C_3^{10}=120$ 個

(3) 考慮二位數、三位數、四位數、…、十位數(因爲最大的數爲 9876543210)

總共有 $C_2^{10}+C_3^{10}+\cdots+C_{10}^{10}$ 個

看到 $C_2^{10}+C_3^{10}+\cdots+C_{10}^{10}$ ，要想到二項式定理。

二項式定理 ：$(x+y)^{10}=C_0^{10}x^{10}+C_1^{10}x^9y+C_2^{10}x^8y^2+\cdots+C_{10}^{10}y^{10}$

$x=1,y=1$ 代入：$(1+1)^{10}=C_0^{10}1^{10}+C_1^{10}1^91+C_2^{10}1^81^2+\cdots+C_{10}^{10}1^{10}$

所以 $C_2^{10}+C_3^{10}+\cdots+C_{10}^{10}=2^{10}-C_0^{10}-C_1^{10}=1024-1-10=1013$

Ans：1013個 #