

# 中正國防幹部預備學校 99 學年度教師甄選數學科試題卷

## 一. 填充題(共 48 分, 每題 6 分)

1. 設四點  $A-B-C-D$  且  $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} = 2 : 3 : 1$ , 以  $\overline{BC}$  為直徑作圓, 取圓上一點  $P$  (但  $P \neq B, P \neq C$ ), 則  $(\tan \angle APB) \times (\tan \angle CPD) =$  【      】。
2.  $n$  為正整數, 若  $n^3$  除以 66 的餘數為  $n$ , 則滿足條件的  $n$  共有【      】個。
3. 已知  $G$  為  $\triangle ABC$  的重心,  $\overline{BC} = 10, \overline{AG} = 4, \angle BGC = 135^\circ$ , 則  $\triangle ABC$  的面積為【      】。
4. 圖形  $C: y = 3 - \sqrt{4 - x^2}$ , 若  $P(x, y)$  在  $C$  上, 則  $\frac{y}{x+3}$  的最大值為  $M$ , 最小值為  $m$ , 則序對  $(M, m)$  為【      】。
5. 有九個人排隊買電影票, 票價每張 50 元, 若這九個人中有五人身上帶有 50 元硬幣, 其餘四人只帶有 100 元鈔票, 今每個人限購一張票, 則售票員不備零錢能將票順利售完不發生找錢困難的售票法共有  $A$  種, 又這九個人排隊的方法共有  $B$  種, 則序對  $(A, B)$  為【      】。
6. 若  $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1, ac + bd = \frac{1}{2}$ , 則  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  之值為【      】。
7.  $\int_0^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-x)(x+x^n)}{1+x^n} dx$  之值為【      】。
8. 設  $f(x) = \sqrt{x^4 + 3}$ , 則  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - 1}{x - 1} =$  【      】。

## 二、計算題(共 28 分, 除第 2 題 12 分《每小題 6 分》, 其餘每題 8 分)

1. 設實數  $x, y$  滿足方程式  $\log(x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{9}) = \log x + \log y$ , 則數對  $(x, y) = ?$ .
2.  $n$  個數  $1, 3, 5, 7, 9, \dots, (2n-1)$  的算術平均數  $\bar{x}$ , 標準差  $s$ , 求:
  - (1) 標準差  $s$ 。
  - (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s}{x}$ 。

3. 設  $a > 0$ ， $O(0, 0)$  為原點。在拋物線  $ay = a^2 - x^2$  上取一點  $P(s, t)$ ， $s > 0$ 。過  $P$  點作拋物線之切線，交  $x$  軸， $y$  軸於  $Q, R$  兩點。當  $P$  點變動時， $\triangle OQR$  面積的最小值為何？

### 三、證明題(共 24 分，每題 8 分)

1. 已知  $x$  是非零的實數且  $x + \frac{1}{x}$  為整數，用數學歸納法證明：  
對任意自然數  $n$ ， $x^n + \frac{1}{x^n}$  必為整數。
2. 利用二項式定理與棣美弗定理導出正弦與餘弦函數的四倍角公式。
3. 設  $a, b, c$  表三角形之三邊長，試證： $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ 。

## 數學科標準答案

一.	填充題	二.	計算題
1.	$\frac{1}{10}$	1.	$(x, y) = (\sqrt[3]{\frac{1}{9}}, 3\sqrt{\frac{1}{3}})$
2.	17	2.	(1)標準差 $s$ 。 答案： $\sqrt{\frac{n(n+1)}{3}}$
3.	$\frac{63}{2}$		
4.	$(3, \frac{9-2\sqrt{14}}{5})$		
5.	(42,120960)	3.	$\frac{4\sqrt{3}}{9}a^2$
6.	$\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$		
7.	$\frac{7}{6}$		
8.	$\frac{5}{2}$		