

**【數學科】** 初試題目卷

一、填充題(每題 6 分，共 60 分)

1. 設數列  $\{a_n\}$  滿足  $a_1 = 1$ ，且對每個正整數  $k \geq 2$ ，滿足  $5(a_1 + a_2 + \dots + a_k) = (k+4)a_k$ ，則  $a_{21} =$  \_\_\_\_\_。
2. 正實數  $x$  滿足  $(\log_2 x)(\log_4 x)(\log_6 x) = (\log_2 x)(\log_4 x) + (\log_2 x)(\log_6 x) + (\log_4 x)(\log_6 x)$ ，則  $x =$  \_\_\_\_\_。
3. 設  $n$  為正整數，定義  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ 。試問  $10! \times 9! \times 8! \times \dots \times 3! \times 2! \times 1!$  的正因數中是完全平方數的共有 \_\_\_\_\_ 個。
4. 有一多項式  $f(x)$ ，若  $f(x)$  除以  $(x-1)^2$  餘  $3x+2$ ，則  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 f(1) - f(x^2)}{x-1} =$  \_\_\_\_\_。
5. 已知  $G$  為  $\triangle ABC$  的重心， $\overline{BC} = 10$ ， $\overline{AG} = 4$ ， $\angle BGC = \frac{3\pi}{4}$ ，則  $\triangle ABC$  的面積為 \_\_\_\_\_ 平方單位。
6. 若  $n$  為自然數，則  $C_2^2 + C_2^4 + C_2^6 + \dots + C_2^{2n} =$  \_\_\_\_\_。(請以  $n$  的形式表示)
7.  $\lim_{n \rightarrow \infty} [(n^3 + 2n^2 + 3)^{\frac{1}{3}} - (n^2 + 5)^{\frac{1}{2}}] =$  \_\_\_\_\_。
8. 若  $x$  為正整數且滿足  $2^x = x^{32}$  則  $x =$  \_\_\_\_\_。
9. 求  $2^{2025}$  的十位數為 \_\_\_\_\_。
10. 若  $n$  為自然數且滿足  $n! = 23n^3 - 64n^2 + 41n$ ，這裡  $n!$  代表  $n$  的階乘數，求  $n =$  \_\_\_\_\_。

二、計算證明題(每題 10 分，共 40 分)

1. 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$  之值。

2. 設  $a, b, c, d, e$  是滿足  $a + 2b + 3c + d + e = 8$ ， $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$  的實數，求  $e$  的最大值。

3. (1)  $\triangle ABC$  中， $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{BC} \cdot \vec{CA} = \vec{CA} \cdot \vec{AB}$ ，則  $\cos A = ?$  (5分)

(2)  $\triangle ABC$  中， $2\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{BC} \cdot \vec{CA} = 3\vec{CA} \cdot \vec{AB}$ ，則  $\cos A = ?$  (5分)

4. 直角坐標系中，已知有一圓方程式為  $x^2 + y^2 = 37$ ，且圓的內部有一點  $P(1,2)$ ，

(1) 若  $P$  點為圓的某弦的中點，試求此弦所在的直線方程式。(5分)

(2) 若  $P$  點為圓的某弦的一個三等分點，試求此弦所在的直線方程式。(5分)

桃園市立中壢家事商業高級中等學校 114 學年度教師甄選 初試 - 答案卷

一、填充題(每題 6 分，共 60 分)

1	2	3	4	5
10626	1 或 48	2160	9	$\frac{63}{2}$
6	7	8	9	10
$\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$	$\frac{2}{3}$	$2^8$	3	7