

臺北市立中崙高級中學 113 學年度第 1 次數學科

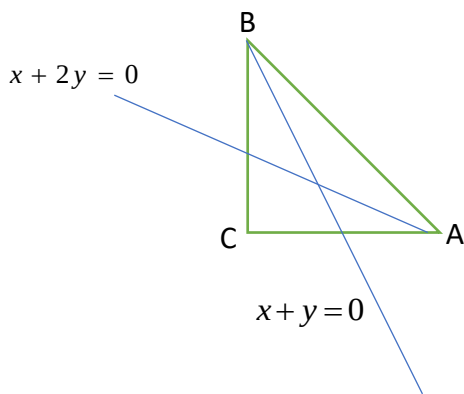
正式教師甄選 筆試 題目卷

※考試時間：120 分鐘

※共二大題，總分 100 分

壹、填充題(每題 5 分)

1. 已知 $\triangle ABC$ 為正三角形，其邊長為 2。若圓 Γ 為 $\triangle ABC$ 的內切圓，且與 $\overline{BC}$ 切於點 D ，連接 $\overline{AD}$ 與圓 Γ 交於另一點 E ，再連接 $\overline{BE}$ 與圓 Γ 交於另一點 F ，則 $\overline{BF}$ 的長度為_____。
2. 小崙從集合 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 中選取 5 個子集合 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 。已知 $n(A_1) = 1$ 、 $n(A_2) = 2$ 、 $n(A_3) = 3$ 、 $n(A_4) = 4$ 、 $n(A_5) = 5$ ，若對於 $1 \leq i < j \leq 5$ ，必須滿足「 $A_i \cap A_j = \emptyset$ 或 $A_i \subset A_j$ 」，請問小崙有_____種選取方法？
3. 已知 x, y 均為非負整數。若方程式 $3x + 2y = n$ 恰有 24 組解，則所有 n 的可能值的總和為_____。
4. 已知曲線 $x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 2y = 0$ 恰與圓 $x^2 + y^2 = 1$ 交於兩點。其中一個交點為 $(0, 1)$ ，則另一交點的坐標為_____。
5. 已知兩複數 z, w 滿足 $z + w = z^2 + w^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}i$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ 。則 $|\operatorname{Re}(z)| =$ _____。
6. 若方程式： $9^x - 2(m + 1) \cdot 3^x - (m - 1) = 0$ 有兩個相異實根，求實數 m 的範圍。
7. 平面上有一定點 $A(-3, 3)$ 及一圓 $C: x^2 + y^2 - 4x - 4y + k = 0$ ，若光源由 A 點射出，碰到 x 軸上 P, Q 兩點形成的兩條反射光線恰好與圓 C 相切，且 $\overline{PQ} = \frac{7}{4}$ ，求 k 之值。
8. 如圖， $\triangle ABC$ 為直角三角形，其中 $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 36$ ，而 $\overline{BC}$ 上的中線為： $x + 2y = 0$ ， $\overline{AC}$ 上的中線為： $x + y = 0$ ，求 $\triangle ABC$ 的面積。



9. 已知 $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_n = \left(\frac{1 + a_{n-1}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \cdot (1 - a_n)$ 。
10. 設 α, β 為方程式： $3\sin 2x + 4\cos 2x = 1$ 的二根，求 $\sin 2(\alpha + \beta)$ 之值。
11. 小明給阿花 7 顆巧克力當禮物，然後小明跟阿花說：「你每天至少要吃一顆 巧克力，表示你有想念我，當然你要一次吃好多顆也可以喔。」
設隨機變數 X 代表阿花吃完巧克力的天數， $X = 1, 2, \dots, 7$ ，求期望值 $E(X)$ 。
12. 設 $f(x)$ 為一實值函數，且滿足 $f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{3}{x} = 0$ ，求 $[f(x)]^2$ 的最小值。

貳、計算證明題(每小題 10 分)

1. 已知 $f(x) = (x + 2)^{24} - (x + 1)^{24}$ ，試求 $f(x)$ 除以 $(x^2 + x + 1)$ 所得之餘式。

2. 已知 $a_1 = 2^{20} - 24$ ，且對於正整數 n ，有
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 1 & , \text{當 } a_n \text{ 為奇數} \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2} & , \text{當 } a_n \text{ 為偶數} \end{cases}$$
。若正整

數 M 使得 $a_M = 1$ ，試求 M 值。

3. (1) 請舉例說明：為何“不同物分給人，每人至少一物”的問題不可以每個人先給一物後，再隨意分給人？

(2) 若有 5 位校安人員要到 3 個校門口協助放學，亦即每個校門至少要有一位校安人員，請問：其中 2 位校安人員 小明與阿花 不在同一個校門值勤的機率為何？

試題答案

壹、填充題(每題 5 分)

1	2	3	4	5	6
$\frac{\sqrt{21}}{7}$	73920	849	$\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$0 < m < 1$
7	8	9	10	11	12
7	144	$\frac{\pi^2}{18}$	$\frac{24}{25}$	4(天)	8

貳、計算證明題(每小題 10 分)

1.
$3^{12} - 1$
2.
35
3. (1)
重覆計算(需舉例說明)
3. (2)
$\frac{19}{25}$