

桃園市立陽明高中 113 學年度教師甄選

數學科筆試測驗題目卷

一、填充題：(12 題，每題 5 分，共 60 分)

1. $\triangle ABC$ 三邊所在的直線分別為 $L_1: 3x - 4y = 6$, $L_2: 11x + 2y = 22$ 及 L_3 。已知 L_1 與 L_2 的交點為 A , $\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 邊上的高，且 D 點坐標為 $(-2, -8)$ ，則 $\triangle ABC$ 面積為何？

2. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{80}{n} \left[\left(\frac{3}{n} \right)^4 + \left(\frac{8}{n} \right)^4 + \left(\frac{13}{n} \right)^4 + \cdots + \left(\frac{5k-2}{n} \right)^4 + \cdots + \left(\frac{5n-2}{n} \right)^4 \right]$ 之值為何？

3. 一組 12 個數：3, 6, 7, 10, 11, 14, 21, 25, 33, 36, 40, 42。從中任取 4 個不同的數，則這 4 個不同數的中位數為 23 的機率為何？

4. AAAABBBCCC 排成一列，相同字母不相鄰的排法有多少種？

5. 請計算 $22^{17} + 24^{17}$ 除以 529 的餘數為何？

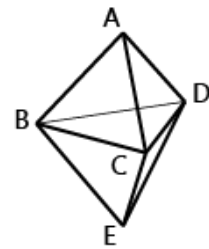
6. 已知空間中 $\triangle ABC$ 的三頂點分別為 $A(1, -4, 4)$, $B(3, -2, 2)$, $C(4, 2, -2)$ ，有一平面 $E: x + by + cz + d = 0$ 分別交於 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 於 P, Q 兩點，且 $\overline{AC}$ 垂直平面 E ，若 $\triangle ABC$ 面積為 $\triangle APQ$ 面積的 30 倍，求 d 的值為何？

7. 整係數方程式 $x^2 + (m+1)x - 3(m+1) = 0$ 有整數解，求 m 的值為何？

8. 坐標平面上，設單位圓上一點 P ， $\overline{OP}$ 與 x 軸正向夾角為 θ 。今對 P 做以下兩種線性變換：「以原點 O 為圓心將 P 旋轉 3θ 」，與「將 P 對 $L: y = x$ 鏡射」，變換後得相同 Q 點，則滿足此條件的 P 點有多少個？

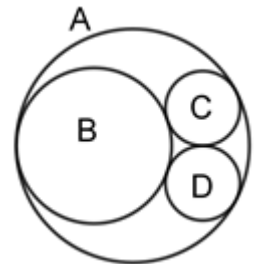
9. 陽明高中校內數學競賽共有 12 道題目，出題老師將這 12 道題目依照難度分成 1 到 12，如果希望出題時難度為 k 的題目排在難度為 $k+2$ 的題目之前，且已知 $1 \leq k \leq 10$ ，則將會有多少種出題方式？

10. 如右圖，一個永恆生命體在此立體中的 5 個頂點間移動：從 A 點出發，每經過一個單位時間，就隨機移動到相鄰的頂點上，永不停歇。則此永恆生命體在長久未來達成穩定平衡的情況下，出現在 A 點的機率為何？



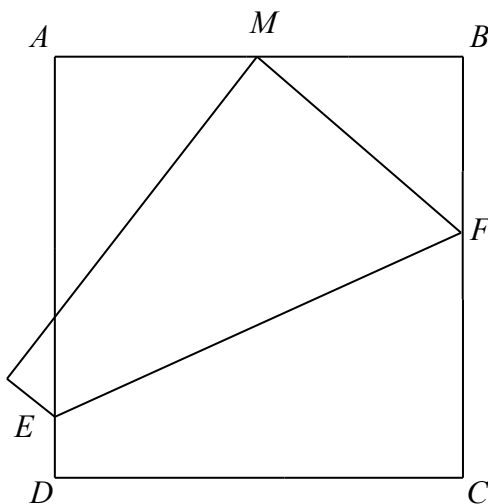
11. 若曲線 $y = 2x - x^2$ 與 x 軸所圍部分面積被直線 $y = mx$ 二等分，則 m 的值為何？

12. 如右圖，圓 B 、 C 、 D 兩兩外切並都與圓 A 內切，若圓 A 半徑為 3，圓 B 半徑為 2，圓 C 與圓 D 全等，則圓 C 半徑為何？



二、計算證明題：(5 題，每題 8 分，共 40 分)

1. 如下圖，將長 $\overline{AB} = 240$ ，寬 $\overline{BC} = 288$ 的長方形紙張對摺，讓頂點 C 剛好落在 $\overline{AB}$ 的中點 M 上：



若 $\overline{EF}$ 是摺線，則摺線 $\overline{EF}$ 的長度為多少？

2. 試證：橢圓上離焦點最遠與最近的點為長軸兩端點。

3. 坐標平面上，函數 $T(x) = 7 \sin\left(113x + \frac{\pi}{2}\right) + 4\sqrt{2} \sin\left(113x + \frac{5\pi}{4}\right) + 2024$ ，其中 $x > 0$ 。今有一直線 $y = k$ 與函數 $T(x)$ 有交點， n 為正整數且交點從左到右為 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \dots, (a_n, b_n), \dots$ 。令 $c_n = a_{n+1} - a_n$ ，已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ 存在，則 k 的值為何？

4. 空間中，已知點 $A(3, -10, 11)$ ，直線 $L_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ 與

$$L_2: \begin{cases} x = -1 + 2s \\ y = 2 - 2s \\ z = -s \end{cases}, s \in \mathbb{R}, \text{ 今由 } A \text{ 點出發，經過 } L_1 \text{ 上一點再到達 } L_2 \text{ 上一點，求此}$$

路徑的最小值？

5. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{AC} = 6$ ， $\angle BAC = 60^\circ$ ，已知 D 為 $\overline{BC}$ 中點， O 為 $\overline{AD}$ 上一

動點，若 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ 的最大值與最小值分別為 M 與 m ，試求數對

$(M, m) = ?$

桃園市立陽明高中 113 學年度教師甄選數學科筆試測驗答案

一、填充題：(12 題，每題 5 分，共 60 分)

1. 50 2. 10000 3. $\frac{31}{495}$ 4. 248 5. 253 6. $d = 12$
 7. $m = 3, -1, -13, -17$ 8. 5 9. 924 10. $\frac{1}{6}$ 11. $m = 2 - \sqrt[3]{4}$
 12. $\frac{24}{25}$

二、計算證明題：(5 題，每題 8 分，共 40 分)

1. 【解答】： 260

如右圖所示，設 $\angle EFC = \theta$ 。

因為對折，所以 $\angle EFM = \theta$ ，

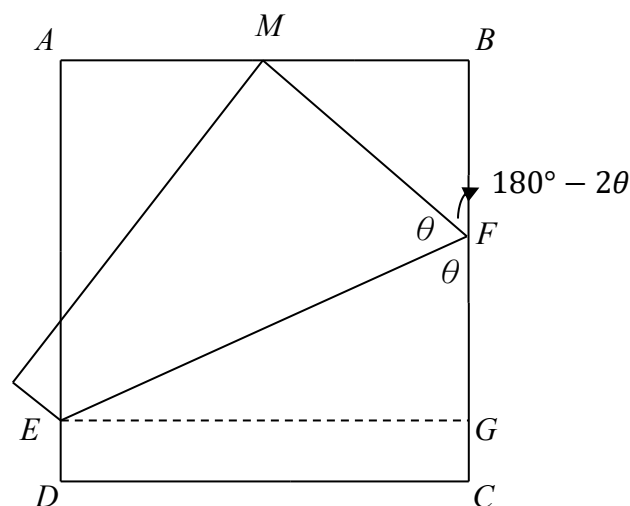
即 $\angle MFB = 180^\circ - 2\theta$ ，

推得 $\angle FMB = 2\theta - 90^\circ$ 。

過 E 點做水平線 $\overline{EG}$ 交 $\overline{BC}$ 於 G 點。

因為 $\overline{AB} = 240$ ，又 M 為 $\overline{AB}$ 的中點，

所以 $\overline{MB} = 120$ ， $\overline{EG} = \overline{AB} = 240$ 。



由直角三角形 EFG 知

$$\sin \theta = \frac{\overline{EG}}{\overline{EF}} = \frac{240}{\overline{EF}}, \text{ 即 } \overline{EF} = \frac{240}{\sin \theta}。 \text{ 又}$$

$$\begin{aligned} 288 = \overline{BC} = \overline{BF} + \overline{FC} &= \overline{BF} + \overline{FM} = \frac{120}{\cos(2\theta - 90^\circ)} + 120 \tan(2\theta - 90^\circ) \\ &= \frac{120}{\sin 2\theta} - 120 \cot 2\theta \\ &= 120 \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta} \\ &= 120 \frac{2 \sin^2 \theta}{2 \sin \theta \cos \theta} \\ &= 120 \tan \theta \end{aligned}$$

解得 $\tan \theta = \frac{12}{5}$ ，即 $\sin \theta = \frac{12}{13}$ 。

將 $\sin \theta = \frac{12}{13}$ 代入 $\overline{EF} = \frac{240}{\sin \theta}$ ，得

$$\overline{EF} = \frac{240}{\sin \theta} = 240 \times \frac{13}{12} = 260$$

2. 參考證明：

不失一般性的情況下，假定橢圓方程式為 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，右邊焦點 $F(c, 0)$ 滿足

$$b^2 = a^2 - c^2$$

設 $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$ 為橢圓上一點，則

$$\begin{aligned}\overline{PF}^2 &= (a \cos \theta - c)^2 + (b \sin \theta)^2 \\&= a^2 \cos^2 \theta - 2ac \cos \theta + c^2 + b^2 \sin^2 \theta \\&= (a^2 - b^2) \cos^2 \theta - 2ac \cos \theta + c^2 + b^2 \\&= c^2 \cos^2 \theta - 2ac \cos \theta + a^2 \\&= (c \cos \theta - a)^2\end{aligned}$$

$$\because c < a$$

$\therefore$ (1) 當 $\cos \theta = 1$ 時（即 $\theta = 0$ ，此時 P 為長軸離 F 較近之端點）

$$\min(\overline{PF}^2) = (c - a)^2 \Rightarrow \min(\overline{PF}) = a - c$$

(2) 當 $\cos \theta = -1$ 時（即 $\theta = \pi$ ，此時 P 為長軸離 F 較遠之端點）

$$\max(\overline{PF}^2) = (-c - a)^2 \Rightarrow \max(\overline{PF}) = a + c$$

故得證

3. 【解答】： $k = 2024$ 或 2029 或 2019

$$T(x) = 7 \sin\left(113x + \frac{\pi}{2}\right) + 4\sqrt{2} \sin\left(113x + \frac{5\pi}{4}\right) + 2024$$

$$= 3\cos 113x - 4\sin 113x + 2024 = 5\cos(113x + \alpha) + 2024 \quad \text{其中}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

當 $k = 0 + 2024$ 或 $5 + 2024$ 或 $-5 + 2024$ 時， $c_n = a_{n+1} - a_n$ 為定值， $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ 存在

當 $k \neq 0+2024$ 或 $5+2024$ 或 $-5+2024$ 時， $c_n = a_{n+1} - a_n$ 恆有兩種可能， $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ 不存在

答： $k = 2024$ 或 2029 或 2019

4. 【解答】： $\sqrt{260} = 2\sqrt{65}$

經由一連串高中數學運算，可得

(1). L_1 與 L_2 為歪斜線，且方向向量垂直

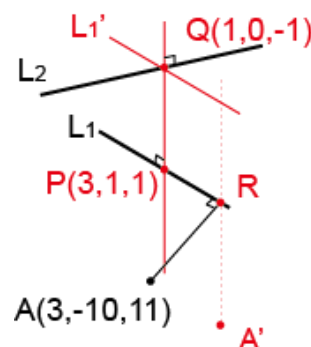
(2). L_1 與 L_2 的公垂線在 L_1 上的垂足為 $P(3,1,1)$ ，在 L_2 上的垂足為 $Q(1,0,-1)$ ，

$$\overline{PQ} = 3$$

(3). $d(A, L_1) = 5$ ，且 A 在 L_1 上的投影點 R 距離 P 為

$$\overline{PR} = 14$$

$$L_1' \parallel L_1, \overrightarrow{A'R} \parallel \overrightarrow{PQ}, \overline{A'R} = \overline{AR} = 5$$



題目所求等同於「點 A' 經 L_1 上一點再到達 L_2 上一點的最短路徑」

$$\text{亦即 } \overline{A'Q} = \sqrt{(3+5)^2 + 14^2} = \sqrt{260} = 2\sqrt{65}$$

5. 【解答】： $(M, m) = \left(0, -\frac{37}{2}\right)$

$$\text{由餘弦定理： } \overline{BC}^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6 \times \frac{1}{2} = 52 \Rightarrow \overline{BC} = 2\sqrt{13}$$

$$\text{由中線定理： } 8^2 + 6^2 = 2(\overline{AD}^2 + \sqrt{13}^2) \Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{37}$$

$$\text{令 } |\overrightarrow{OA}| = x, |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = |2\overrightarrow{OD}| = 2(\sqrt{37} - x), \text{ 其中 } 0 \leq x \leq \sqrt{37}$$

則

$$\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA} \cdot 2\overrightarrow{OD} = x(2\sqrt{37} - 2x) \cos 180^\circ = 2x^2 - 2\sqrt{37}x = 2\left(x - \frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2 - \frac{37}{2}$$

$$\text{在範圍之下， } (M, m) = \left(0, -\frac{37}{2}\right)$$