桃園市立武陵高級中等學校113學年度第一學期第1次正式教師甄選

數學科 初試試題卷　　甄選證號：＿＿＿＿＿＿＿＿（請自行填寫）

※ 應試說明：

★每張答案卷已標明題號，請依序作答，不可顛倒錯置。

★不得要求增補答案卷；考試結束，題目卷與答案卷請於交卷時一併繳回，**禁止攜出試場**。

一、填充題（每小題 5 分；共 75 分）

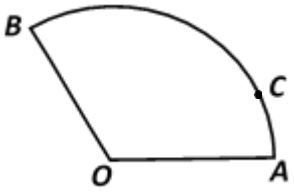
1. 求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+6n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+9n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+3n^2}}\right)=$＿＿＿＿＿＿。

2. 若過原點有三條相異直線與$y=x^3+ax^2+1$相切，試求 實數a之範圍為＿＿＿＿＿＿。

3. 設x、y、$z\in R-\{0\}$，若$\frac{4y-7z}{x}=\frac{2x-2z}{5y}=\frac{x+2y}{z}$，試求 $x:y:z=$＿＿＿＿＿＿。

4. 有一半徑為1且圓心角為120°的扇形OAB，如右圖，動點C在圓弧$\overset{\frown}{AB}$上變動。

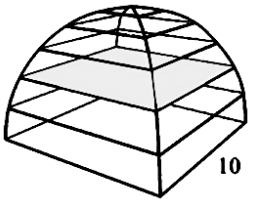
若$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，$x,y\in\mathbb{R}$。試求 $x-y$的範圍為＿＿＿＿＿＿。



5. 擲一粒骰子兩次，點數依序為 (a,b)。
試求 使得$x^2+ax+b=0$有實根 α 、β，且 $\alpha^2+\beta^2<11$ 的機率為_____。

6. 設函數f 滿足 $f(1)=2$，且對每一個正整數x， $f(x+3)\geq f(x)+3$， $f(x+1)\leq f(x)+1$都成立，
試求 $f(2024)=$_____。

7. 動物園用以下方式建立了一個大型鳥籠：在一個邊長為 10 公尺的正方形平台上，
立起兩支以底面對角線為直徑的半圓形鋼架，落腳點就在平台上的四個頂點上，
而交叉點在底面中心的正上方；然後在鋼架上張起鐵絲網，
使得每個水平面上的鐵絲網都是頂點落在鋼架上的正方形，
試求 此鳥籠的容積為_____。



8. 設$a=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}}$，求 a的整數部分為_____。

9. 已知$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$，過$P(3\sqrt{3},1)$，求

（1）$a+b$之最小值為_____。

（2）承(1)，此時Γ方程式為_____。

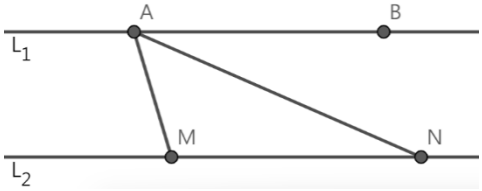
10. 已知多項式函數$f(x)=2x^3-3x^2+4x-2$，則$\sum_{i=1}^{113} f(\frac{i}{113})=$_____。

11. 有一顆公正的正六面體骰子，其六面分別標示$1,2,3,4,5,6$（每個點數會發生的機會均等），今連續投擲113次，且每次的結果互不影響，設a_i表示第i次投擲所得的點數，S_n表示前n次投擲所得的點數和，即$S_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$，隨機變數X表示$S_1,S_2,\cdots,S_{113}$中6的倍數之個數，則

X的數學期望值$E(X)$為_____。

12. 在平面直角坐標系中，已知圓C：$x^2+y^2=36$與定點$P(2,4)$，若M,N是圓C上的兩個相異動點，且滿足$\overrightarrow{PM}\bullet\overrightarrow{PN}=0$，則$|\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}|$的最小值為_____。

13. 如圖所示，已知兩條平行直線L_1, L_2的距離為 2，兩個定點A, B在直線L_1上且$\overline{AB}=4$，而兩個動點M, N在直線L_2上且$\overline{MN}=4$。設△AMN的外心C到直線L_2的距離是d，則 $d+\overline{BC}$的最小值為_____。



14. 設兩複數z_1, z_2滿足$z_1+2\overline{z_2}=-i$與$z_1\times z_2=-3+i$，其中$i=\sqrt{-1}$，則 $|z_1|$的值為_____。

二、計算證明題：（每題 15 分；共 45 分）

1.（1）已知：$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n$，$b_1 \le b_2 \le b_3 \le \cdots \le b_n$，
求證：$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n \ge a_1b_{i_1}+a_2b_{i_2}+a_3b_{i_3}+\cdots+a_nb_{i_n}$，
其中$(i_1, i_2, i_3, \cdots i_n)$為$(1,2,3,\ldots,n)$的一種排列。

（2）已知a、b、c為正數，求證：$\frac{c^2-a^2}{a+b}+\frac{a^2-b^2}{b+c}+\frac{b^2-c^2}{c+a} \ge 0$。

2. 已知$a,b,c,d>0$，
試證：$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^3+c^3+d^3}{b^2+c^2+d^2}+\frac{c^3+d^3+a^3}{c^2+d^2+a^2}+\frac{d^3+a^3+b^3}{d^2+a^2+b^2} \ge a+b+c+d$。

3. 試求最小正實數r，使得存在正實數數列$\{a_n\}$滿足對任意正整數n都有$a_1+a_2+\cdots+a_{n+1} \le ra_n$。

准考證編號：_____

桃園市立武陵高級中等學校113學年度第一學期第1次正式教師甄選

數學科初試答案卷

----------彌----------封----------裝----------訂----------線----------

一、填充題（每小題 5 分；共 75 分）

1. $\frac{2}{3}$	2. $a>3$	3. $(-9):4:1$
4. $-1\le x-y\le 1$	5. $\frac{5}{36}$	6. 2025
7. $\frac{1000\sqrt{2}}{3}$	8. 18	9(1). 8
9(2). $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$	10. -55	11. $\frac{113}{6}$
12. $2\sqrt{13}-2\sqrt{5}$	13 $\sqrt{17}-1$	14. $2\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{5}$