

-----彌-----封-----線-----

一、是非題：每題 2 分，共 10 分。

- ____ 1. 兩函數 $y = f(x) = (0.07)^x$ 與 $y = g(x) = \log_{0.07} x$ 的圖形恰交於三點
- ____ 2. 若數據 $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ 的平均數為 10，標準差為 1，則至少有 75 個數據 x_i 滿足 $8 \leq x_i \leq 12$
- ____ 3. 若已標準化二維數據 $(h_1, k_1), (h_2, k_2), \dots, (h_n, k_n)$ 的最適合直線為 $y = rx$ ，則二維數據 $(k_1, h_1), (k_2, h_2), \dots, (k_n, h_n)$ 的最適合直線為 $y = \frac{x}{r}$ 。
- ____ 4. 已知一正立方體， A 為某一稜的中點，通過 A 點的平面與此立方體表面相截，截痕的形狀有可能為五邊形。
- ____ 5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ 不存在。

二、填充 A：每格 5 分，共 45 分。

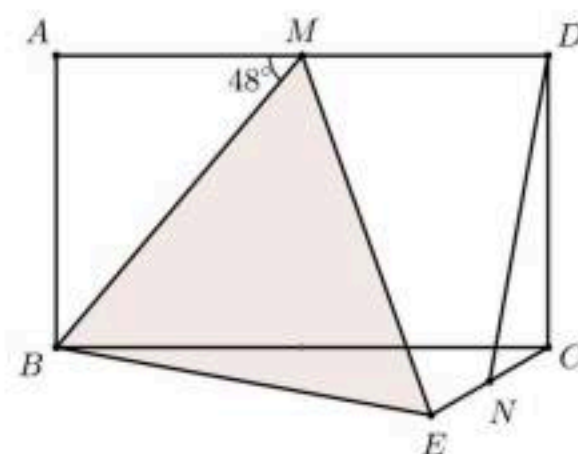
6. 雙曲線 $\Gamma: xy = k$ ， $k < 0$ ，點 $P(2, 2)$ ，過 P 作 Γ 兩切線，切點為 A, B 點，若三角形 $\triangle PAB$ 是正三角形，求 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 設 A, B, Q 為三階實數方陣，滿足 $AQ = QB$ 。設實數 a, b 滿足 $a^2 + b^2 = 1$ 。

令 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+b^2 & -ab \\ 0 & -ab & 1+a^2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & -b & 0 \\ b & a & 0 \end{bmatrix}$ ，求矩陣 B 為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. $x + y + z = 2024$ ，且 $\frac{x}{2021} = \frac{y}{2024} = \frac{z}{2027}$ ，則 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

9. 如右圖，點 M 是長方形 $ABCD$ 的邊 AD 的中點， $\triangle BME$ 是正三角形， N 為線段 $\overline{EC}$ 的中點。已知 $\angle AMB = 48^\circ$, $\overline{BM} = 1$ ，則 $\overline{DN}$ 的長度是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

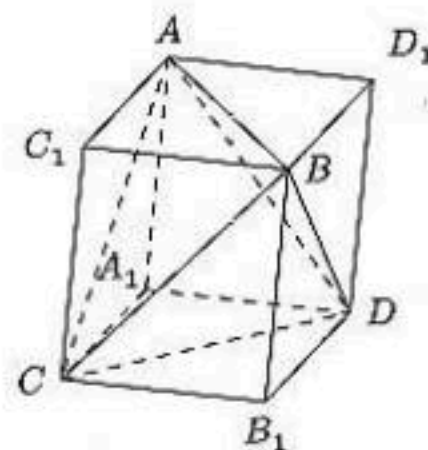


10. 已知 $\sin \theta = \frac{24}{25}$ ， $\cos \theta = \frac{7}{25}$ ， $\text{Arg}(z^2 + 25) = \theta$ ， $\text{Arg}(z^2 - 25) = \theta + \frac{\pi}{2}$ ，求複數 $z = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 如圖所示 $ABCD$ 是一個四面體， $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{BD} = 6$ ， $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 5$ ，對稜線 $\overline{AB}$ 作一平面包含稜線 $\overline{AB}$ ，

且此平面和 $\overline{CD}$ 平行，對稜線 $\overline{CD}$ 作一平面包含稜線 $\overline{CD}$ ，且此平面和 $\overline{AB}$ 平行，...

對四面體 $ABCD$ 的每一條稜線均作對應的操作可得出 6 個平面，此 6 個平面圍成一個平行六面體，求此平行六面體體積 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



12. 小明在森林中迷了路，若繼續往前走則經過 5 分鐘後會回到原地，若返回走則有一半的機會於 5 分鐘後回到原地，另一半的機會於 10 分鐘後走出森林；假設小明向前走的機率為 0.6，問小明能夠走出森林所花費的時間期望值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

彌

封

線

13. 坐標空間中，有一立體圖形 Γ 的底面位於 xy 平面上，且底面是由兩拋物線 $y = x^2$ 與 $y = 8 - x^2$ 圍成的區域，而 Γ 的每一個垂直 x 軸的截面都是正三角形，求 Γ 的體積為_____。
14. There are two distinguishable flagpoles, and there are 19 flags, of which 10 are identical blue flags, and 9 are identical green flags. Let N be the number of distinguishable arrangements using all of the flags in which each flagpole has at least one flag and no two green flags on either pole are adjacent. Find $N =$ _____。

三、填充 B：每格 7 分，共 35 分。

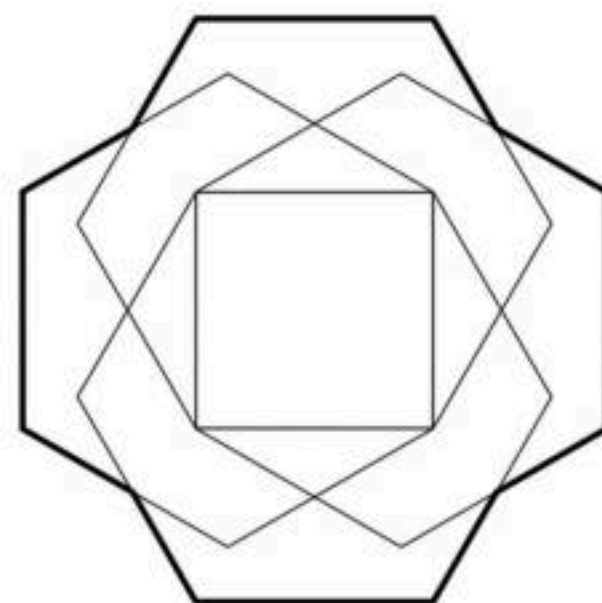
15. 假設一位數學老師決定按照以下規則來決定當天(工作天)要吃團膳。對每一個工作天，
規則 1：如果前兩個工作天都沒有吃團膳，則今天要吃團膳；
規則 2：如果前一個工作天吃團膳，則今天不吃團膳；
規則 3：規則 1 和規則 2 不適用的工作天，透過丟一個公正的硬幣隨機決定今天是否吃團膳。
從長遠看來，數學老師吃團膳的天數佔全部工作天的比例為 P ，試求 P 值為_____。

16. 圓 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 23$ 與直線 $y = x + k$ 交於 A, B 兩點， $O(0,0)$ ，已知 $\angle AOB = 90^\circ$ ，求 k 之值 _____。

17. 多項式 $f(x) = x^{130} - 1$ ， $g(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1$ ，求 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為_____。

18. 設 $f_0(x) = x + |x - 100| - |x + 100|$ ，並對於所有的 $n \geq 1$ ，令 $f_n(x) = |f_{n-1}(x)| - 1$ 。試問有多少個 x 滿足 $f_{100}(x) = 0$ ？
答：_____。

19. Four regular hexagons surround a square with a side length 1, each one sharing an edge with the square, as shown in the figure on the right. The area of the resulting 12-sided outer nonconvex polygon can be written as $m\sqrt{n} + p$, where m, n , and p are integers and n is not divisible by the square of any prime. What is $m + n + p$? Ans: _____。



桃園高中 113 學年度第 1 次教師甄選初試 數學科 參考答案

一、是非題

1.× 2.○ 3.× 4.○ 5.×

二、填充 A

6. -2	7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	8. 6072	9. $\frac{\sqrt{3}}{2}$	10. $\frac{7}{5} + \frac{24}{5}i$, $-\frac{7}{5} - \frac{24}{5}i$
11. $9\sqrt{39}$	12. 30	13. $\frac{512\sqrt{3}}{15}$	14. 2310	

三、填充 B

15. 0.4	16. 3, -6	17. $-x^3 - x - 2$	18. 301	19. -4
---------	-----------	--------------------	---------	--------

四、計算證明題

20. 略