

臺北市立南港高工 113 學年度第 1 次教師甄選筆試命題試題紙

甄選科別： 一般類科科目： 數學科**作答說明**

1. 請使用藍、黑原子筆，並於答案卷作答。
2. 填充題答案若為分數或根式，請化至最簡。
3. 計算、證明與論述題請標明題號及子題號，標示不清者不予計分。

一、填充題(每題 7 分，共 56 分)

1. 若整數 n 可使 $\frac{n^3 + 2024}{n + 11}$ 亦為整數，則 n 的最大值為_____。
2. 平面上，在一個正方形內部(含邊界)放入 6 個邊長為 1 的正三角形，使得這 6 個正三角形的內部區域彼此互不重疊，則此正方形的邊長最小值為_____。
3. 甲乙丙丁戊己庚辛壬癸等 10 人排成一列先後上台，若甲、乙都比丙、丁、戊先上台，且庚比辛先上台，則這 10 人共有_____種不同的上台順序。
4. 滿足 $\int_{k^2}^{k^4} (x - \sqrt{101}) dx = 0$ 的相異實數 k 共有_____個。
5. 數列 $\{a_n\}$ 由 9 項非負實數構成，且對於 $i = 1, 2, 3, \dots, 8$ ，恆有 $a_i^2 + a_{i+1}^2 \leq 3$ 。若 $\sum_{i=1}^9 a_i$ 的最大值為 M 、最小值為 m ，則數對 (M, m) 為_____。
6. 設二次函數 $y = x^2 - 6x + 5$ 的圖形交 x 軸於 A 、 B 兩點， P 是直線 $x + y = -4$ 上的動點。當 $\angle APB$ 有最大值時， $\triangle ABP$ 的外心坐標為_____。
7. 不透明袋中有黑球 2 顆、白球 3 顆、紅球 4 顆、藍球 5 顆，每球被抽到機率均等。現每次從袋中任抽一球，登記顏色後放回，混合均勻後再抽一次，如此反覆進行下去，直到抽

出第 6 次紅球為止。抽球過程中，若某次抽到紅球，且其前後的抽取結果均非紅球，則稱它為「獨立紅」。舉例來說，「白紅紅白藍藍紅紅黑白紅藍白紅」是一種可能的抽球過程，其中出現的第 5、6 次紅球都是獨立紅。求抽球過程中，「獨立紅」出現次數的期望值為_____。

8. 南港高工全校有男、女生各若干人，其中男生人數介於 100 到 1000 人之間。已知若從全校學生中任選兩人，則兩人均為男生的機率恰為 $\frac{1}{2}$ ，則全校男生共有_____人。

二、計算、證明與論述題(共 44 分)

- 對於任意正整數 n ，定義多項式函數 $\begin{cases} p_1(x) = x^2 - 2 \\ p_{n+1}(x) = (p_n(x))^2 - 2 \end{cases}$ ，請回答下列問題：
 - 設 $x \in (-2, 2)$ ，求 $p_{10}(x)$ 的最大值與最小值。(6 分)
 - 求 $p_{10}(x) = 0$ 之相異實根個數。(3 分)
 - 若定義 α_n 是 $p_n(x) = 0$ 的最大實根(舉例來說， $\alpha_1 = \sqrt{2}$)，請證明對於所有正整數 n ， $\alpha_n < \alpha_{n+1} < 2$ 恆成立。(8 分)
- 設實數 a 、 b 滿足 $a \geq b > 0$ 且 $ab = 2$ ，請回答下列問題：
 - 求 $\frac{a^2 + b^2}{a - b}$ 的最小值，以及此時的數對 (a, b) 。(4 分)
 - 求 $5a + 4b$ 的最大值與最小值，以及此時的數對 (a, b) 。(4 分)
 - 求 $4a + 5b$ 的最大值與最小值，以及此時的數對 (a, b) 。(4 分)
 - 承上題，請寫出學生在解第(3)小題時，常見的錯誤類型或迷思概念。(4 分)
- 在數學「直線與圓」單元中提到，坐標平面上一點 $P(m, n)$ 到直線 $L: ax + by + c = 0$ 的距離 $d(P, L) = \left| \frac{am + bn + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$ 。請回答下列問題：
 - 請以高職一年級學生的先備知識為基礎證明上式。(5 分)
 - 現有一道問題「求平面上一點 $P(1, 2)$ 到直線 $L: x + y = -3$ 的距離。」除了使用「點到直線的距離」公式之外，請你另寫出 2 種給高職二年級學生的解答。(6 分)

臺北市立南港高工 113 學年度第 1 次教師甄選筆試參考答案

甄選科別：一般類科

科目：數學科

更正說明：

填充題第 2,5 題答案更正如下，閱卷以正確答案為準。

一、填充題

1. 682
2. $\frac{9-3\sqrt{3}}{2}$
3. 181440
4. 5
5. $(\sqrt{123}, 0)$
6. $(3, 7-3\sqrt{10})$
7. $\frac{170}{49}$
8. 493

二、計算、證明與論述題

1. (1)最大值 2，最小值 -2
(2)1024
2. (1)4， $(a, b) = (\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1)$
(2)最大值不存在，最小值 $9\sqrt{2}$ ， $(a, b) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$
(3)最大值不存在，最小值 $4\sqrt{10}$ ， $(a, b) = (\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{2\sqrt{10}}{5})$