# 臺北市立南港高級中學 113 學年度第 1 次正式教師甄試　數學科 試題

| |
|---|
| 准考證號碼： |
| 姓名： |

**(配分: 1~11 題 每題 8 分, 第 12 題 12 分.)**

1. 求值: $100C_0^{100}+99C_1^{100}+98C_2^{100}+\cdots+2C_{98}^{100}+C_{99}^{100}$ 。

2. 證明: 在任意 7 個實數中必能找到兩個數 $x$ , $y$ 滿足 $0\le\dfrac{x-y}{1+xy}\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 。

3. 小明想要安排從星期一到星期五共五天的午餐計畫。他的餐點共有四種選擇：牛肉麵、大滷麵、咖哩飯及排骨飯。小明想要依據下列兩原則來安排他的午餐：

   （甲）每天只選一種餐點但這五天中每一種餐點至少各點一次

   （乙）連續兩天的餐點不能重複且不連續兩天吃麵食

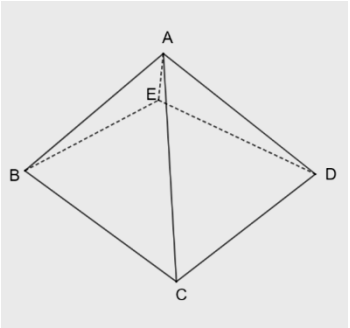
   根據上述原則，小明這五天共有幾種不同的午餐計畫？

4. 有一個金字塔，如右圖，其中底面是正方形，

   四個側面是等腰三角形( $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{AE}$ )，

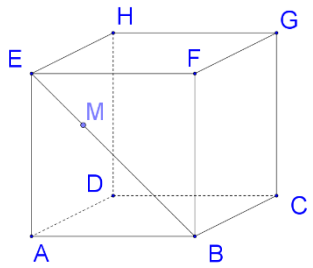
   設金字塔的側面與底面之夾角為 $\theta$ ，且 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$ ，

   又側面與側面的夾角為 $\alpha$ ，求 $\cos\alpha=$？ (以 $a$ 表示)



5. 設 $a_n=\sum_{k=1}^{3n}\frac{k^2}{3n^3+k^3}$ ,$n\in N$ ，求 $\lim_{n\to\infty}a_n$ .

6. 如圖,邊長為 1 的正方體 $ABCD-EFGH$,M 點為對角線 BE 上一點,則$\overline{AM}+\overline{MH}$最小值為 ?




7. I 為ΔABC 內心,D 在$\overline{AB}$邊上, E 在$\overline{AC}$邊上,且 D-I-E 三點共線,已知$\overline{AD}=\overline{DE}=5$,$\overline{AE}$=6, 則 $\overline{AI}$= ?

8. 在 $\Delta ABC$ 中，$\overline{AB}=10$，$\overline{AC}=9$，$\cos\angle BAC=\frac{3}{8}$。設點 $P$、$Q$ 分別在邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上使得 $\Delta APQ$ 之面積為 $\Delta ABC$ 面積之一半，則 $\overline{PQ}$ 之最小可能值為?

9. 已知正數 $a$ ， $b$ ， $c$ 滿足 $a+b+c=1$ ，試求 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$ 之最小值

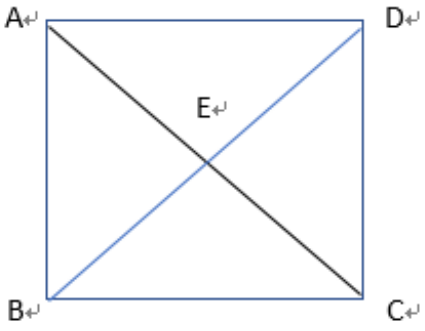
10. 設數列$<a_n>$，$<b_n>$滿足$a_0+b_0=2$，且對每一正整數$n$，恆有$a_n=\sqrt{3}a_{n-1}-b_{n-1}$，
$b_n=a_{n-1}+\sqrt{3}b_{n-1}$，則$a_{18}+b_{18}=$ ？

11. 坐標平面上，在以$O(0,0),A(0,1),B(1,1),C(1,0)$為頂點的正方形（含邊界）內，
令$R$為滿足下述條件的點$P(x,y)$所成區域：
與點$P(x,y)$的距離為$|x-y|$之所有點所成圖形完全落在正方形$OABC$（含邊界）內。
則區域$R$的面積為何 ？

12. 如右圖，一個球在任一點每一秒向鄰近點移動或不動的機率都相等
(即在 A 點時向 B，D，E 或留在 A 的機率都是$\frac{1}{4}$)，現在先把球放在 E 點

(1) 經過 2 秒，求仍然留在 E 的機率為何 ？

(2) 設$f(n)$表示經過$n$秒後球仍然留在 E 點的機率，若$f(n+1)=xf(n)+y$，其中$x$，$y$為定數與$n$無關，試求數對$(x,y)$.



# 臺北市立南港高級中學 113 學年度 第 1 次正式教師甄試

**數學科參考答案**

:

1. $50\cdot 2^{100}$

2. 略

3. 60

4. $-a^2$

5. $\frac{1}{3}\ln 10$

6. $\sqrt{2+\sqrt{2}}$

7. $\frac{24}{11}\sqrt{5}$

8. $\frac{15}{2}$

9. $\sqrt{2}$

10. $-2^{19}$

11 $\frac{1}{3}$

12. (1) $\frac{6}{25}$ (2) $(-\frac{1}{20},\frac{1}{4})$