

教育部受託辦理113學年度 公立高級中等學校教師甄選

數學科試題

作答注意事項

1. 本試題共兩部分：選擇題 12 題，及綜合題 2 大題，共計100分；
2. 選擇題請用2B軟心鉛筆在答案卡劃記，綜合題限用藍色、黑色原子筆或鋼筆在答案本上作答，但繪圖時得使用黑色鉛筆。
3. 本科不可以使用電子計算器。

第一部分：選擇題 (共40分)

一、單選題 (每題3分，共24分)

- (D) 1. 在 $\triangle ABC$ 中 a, b, c 分別為角 A, B, C 的對邊，向量 $\vec{u} = (b, 3a - c)$ ， $\vec{v} = (\cos B, \cos C)$ ，且

$\vec{u} \parallel \vec{v}$ ，求 $\cos B = ?$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ (D) $\frac{1}{3}$ 。

- (D) 2. 若 $f(x) = 2^x - \frac{1}{2^x}$ ，求 $f(\log_4(\log_5 4)) + f(\log_4(\log_4 5)) = ?$ (A) 5 (B) $\sqrt{2}$ (C) 1 (D) 0。

- (C) 3. 任意的選取兩個正整數 a, b 且 $1 \leq a, b \leq 9$ 。試問點 (a, b) 落在拋物線 $y = ax^2 - bx$ 上方的機率為何？

(A) $\frac{15}{81}$ (B) $\frac{17}{81}$ (C) $\frac{19}{81}$ (D) $\frac{7}{27}$ 。

- (B) 4. 設 a, b 為整數且 $(a + 3i)(b + i) = 12 + 14i$ ，若 α, β 分別為 $a + 3i$ 及 $b + i$ 的主幅角 ($0^\circ \leq \alpha, \beta < 360^\circ$)，令 $\theta = \alpha + \beta$ ，下列何者正確？

(A) $\theta = 45^\circ$ (B) $45^\circ < \theta < 60^\circ$ (C) $\theta = 60^\circ$ (D) $60^\circ < \theta < 90^\circ$ 。

- (D) 5. 設 $f(x) = x + 3 + \int_0^1 g(x) dx$ ， $g(x) = 2x - 9 + \int_0^2 f(x) dx$ ，試求 $f(3) = ?$

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6。

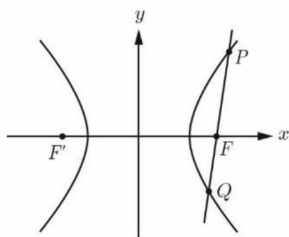
- (D) 6. 已知 $\triangle ABC$ 的三邊長為 a, b, c ，且 $\log_a b$ 是方程式 $x^2 - 2x + \sin C + \cos C = 0$ 的重根，問 $\triangle ABC$ 是哪一種三角形？

(A) 銳角三角形 (B) 正三角形 (C) 鈍角三角形 (D) 等腰直角三角形。

- (C) 7. 在某教師甄試中規定 N 位參加筆試者，可進入複試的人數為 $2^{1 + [\log_2(N-1)]} - N$ 。已知進入複試的人數為 19 位，試問最小的兩個可能 N 的值之和為何？($[x]$ 代表不大於 x 的最大整數) (A) 38 (B) 90 (C) 154 (D) 406。

- (送分) 8. 如圖，雙曲線 $\Gamma: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 中，過焦點 F 作一焦弦 $\overline{PQ}$ ，已知 $\overline{PQ}$ 的斜率為 1，則

$\overline{PF'} + \overline{QF'} = ?$ (A) 32 (B) 36 (C) 40 (D) 48。



二、複選題 (每題4分，共16分)

- (AB) 9. 設 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 之圖形的所有切線中，以過切點 $(1, 0)$ 之切線斜率為最小，且

C

此切線亦通過原點，則下列哪些選項是正確的？

(A) $f'(1) = 0$ (B) $f(x)$ 沒有極大值 (C) $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸相切 (D) 方程式 $f(x) = 1$ 有三相異實根。

- (AD) 10. 在實數線上，動點 A 從原點開始往正向移動，動點 B 從 8 的位置開始往負向移動。兩個動點每一秒移動一次，已知第一秒 A 、 B 移動的距離分別為 1、4，且 A 、 B 每次移動的距離分別為其前一次移動距離的 $\frac{1}{2}$ 倍、 $\frac{1}{3}$ 倍。令 c_n 為第 n 秒時 A 、 B 的中點位置。試選出正確的選項。

(A) $c_1 = \frac{5}{2}$ (B) $c_2 > c_1$ (C) 數列 $\langle c_{n+1} - c_n \rangle$ 是一個等比數列 (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 2$ 。

- (BC) 11. 投擲一枚不均勻硬幣，出現正面的機率為 $\frac{3}{4}$ ，出現反面的機率為 $\frac{1}{4}$ 。今丟擲此硬幣 5 次

D

，若 X 表示出現正面的次數，則下列敘述何者正確？

(A) $X = 1$ 的機率為 $\frac{15}{512}$ (B) $X = 2$ 的機率小於 $X = 3$ 的機率 (C) X 的期望值為 $\frac{15}{4}$ (D) X 的標準差為 $\frac{\sqrt{15}}{4}$ 。

- (BD) 12. 已知 $C_1: (x-1)^2 + y^2 \leq 1$ ， $C_2: x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ ，試選出正確的選項。

(A) C_1 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積為 π^2 立方單位 (B) C_1 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積為 $\frac{4}{3}\pi$ 立方單位 (C) C_2 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積為 π^2 立方單位 (D) C_2 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積為 $2\pi^2$ 立方單位。

第二部分：綜合題 (共60分)

一、填充題 (每格4分，共36分)

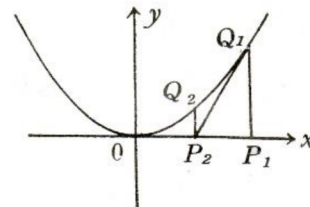
1. 設 $f(x) = x^2 - 16$ ，若 $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ 為 $[1, 3]$ 的 n 等分割， $n \in \mathbb{N}$ ，且知黎曼下和 L_n ，且知黎曼上和 U_n ，若 $|U_n - L_n| < \frac{1}{10000}$ ，試求最小之自然數 n ？ $n=160001$

2. θ 為某一角度，方程組 $\begin{cases} x \cos \theta - y \sin \theta = 4 \\ x \sin \theta + y \cos \theta = 3 \end{cases}$ 的解為 $(1, 2\sqrt{6})$ ，試求 $\begin{cases} x \cos \theta - y \sin \theta = -3 \\ x \sin \theta + y \cos \theta = 4 \end{cases}$ 的解 (x, y) 。 $(-2\sqrt{6}, 1)$

3. 設 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，若 $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ ，則 $\sin \angle BAC = ?$ $\frac{\sqrt{21}}{6}$
4. 已知 $a > b > 0$ ， a, b, c 為整數，且 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ， $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^6 - 1} = 2$ ，試求 a, b, c 之值。

$$a=4, b=1, c=-6$$

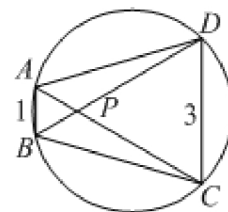
5. 自 $P_1(1,0)$ 作 x 軸的垂直線交拋物線 $y = x^2$ 於 $Q_1(1,1)$ ，再由 Q_1 作此拋物線的切線交 x 軸於 P_2 ，又自 P_2 作 x 軸的垂直線交此拋物線於 Q_2 ，



如此依序進行，試求級數 $\overline{P_1Q_1} + \overline{P_2Q_2} + \cdots + \overline{P_nQ_n} + \cdots$ 之和。 $\frac{4}{3}$

6. 有一個 n 項的等差數列 $\langle a_n \rangle$ ，若公差為 $\frac{\sqrt{13}}{2}$ 且此數列的變異數為 260，試問項數 $n = ?$ $n=31$

7. 如右圖，圓內接四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB}=1$ ， $\overline{CD}=3$ ， $\overline{BD}=4$ ， $\angle ABD = 60^\circ$ ，設 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 相交於 P 點，求 $\triangle BCP$ 面積。



$$\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

8. 最新網路遊戲 CS2 online 因電腦配備需求較高，在每次大戰中，造成每顆 CPU lag（延緩執行程式）的機率為 P ，現有相同製程、規格的雙核心（2 顆 CPU）與四核心（4 顆 CPU）兩臺電腦，研究人員指出，若一半以下（含一半）的 CPU 發生 lag 仍可完成 1 次大戰，今欲使四核心電腦完成 1 次大戰的機率大於雙核心電腦，研究人員應將 P 校正到範圍？ $0 < P < \frac{1}{3}$
9. $x \in R$ ， $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ，若 $f(|x|) = |f(x)|$ ，則 x 的範圍為何？ $0 \leq x \leq 1$ 或 $3 \leq x$

二、計算證明題（每題 8 分，共 24 分）

1. n 筆數據 (x_i, y_i) ， $1 \leq i \leq n$ ，若 n 筆數據 (x_i, y_i) 的相關係數存在並記為 r ，試用高中數學的方法證明 $|r| \leq 1$ 。
2. 請利用 108 課綱高一學生可以理解的方法證明：已知點 $P(x_0, y_0)$ ，直線 $L: ax + by + c = 0$ ，則 P 到 L 的距離為 $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。
3. 令 $x_1, x_2, \dots, x_{18}$ 為方程式 $x^{18} + 4x^{11} + 1 = 0$ 的 18 個根，求 $(x_1^4 + x_1^2 + 1)(x_2^4 + x_2^2 + 1) \cdots (x_{18}^4 + x_{18}^2 + 1)$ 的值為何？