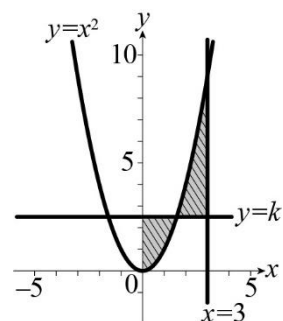


113 年國立鳳山高級中學教師甄選初試筆試試題【數學科】

一、 填充題 配分：每題 6 分，共 72 分。全對才給分。 答題：請標註題號並依題序作答，切勿跳題回答。

- 已知 m, n 為正整數，且 $\sqrt{m} + \sqrt{n} = \sqrt{2023}$ ，試求數對 (m, n) 有_____組解。
- 設四面體 $OABC$ 之體積為 20，若 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ ， $x, y, z \geq 0$ 且滿足 $2 \leq x + y + z \leq 4$ ，試求一切 P 點所形成之圖形體積為_____。
- 已知方陣 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ， $A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ 。設 n 為正整數，試用 n 表方陣 A^n 之一般式為_____。
- 假設地球為一球體，今以地球球心為原點，地球半徑為單位長，建立一空間直角坐標系。設地球表面上甲、乙、丙三地，甲、乙兩地的座標分別為 $(1, 0, 0)$ 及 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ，丙地為甲乙兩地球面上最短路徑之中點，試求丙地之座標為_____。
- 設 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 為一個等差數列， $b_1, b_2, b_3, \dots$ 為一個等比數列。
對於每一個正整數 n ，設 $c_n = a_n + b_n$ ，組成數列 $c_1, c_2, c_3, \dots$ 。如果 $c_1 = 1$ ， $c_2 = 4$ ， $c_3 = 15$ ， $c_4 = 2$ ，
試求 $c_6 =$ _____。
- 設 Γ 為二次函數 $y = x^2$ 與直線 $x = 0$ 、 $x = 3$ 、 $y = k$ ($0 < k < 9$) 在第一象限所圍的封閉區域（附圖中的斜線區域），當 $k = \alpha$ 時， Γ 的面積最小為 β ，試問 $\alpha + \beta =$ _____。



- 試求滿足方程式 $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = \frac{x}{7}$ 之所有實數解的和=_____。
- 在複數平面上， z ， $\frac{1}{z}$ ， $z + \frac{1}{z}$ 與原點 O 圍成一平行四邊形，此平行四邊形面積為 $\frac{37}{35}$ 。
已知 z 的實部是正數，若 $\left| z + \frac{1}{z} \right|$ 的最小值為 d 。試求 $d^2 =$ _____。
- 坐標平面上， $A(2, 2)$ ， $B(0, 8)$ ， $C(-16, 16)$ 所形成的 $\triangle ABC$ 繞著 x 軸旋轉一圈所得的旋轉體體積為何？_____。
- 某餐飲公司老闆正在安排一個六天春節期間的開店營業狀況，若此六天中，老闆每天都能自由考慮選擇開店營業或休息與否，但老闆訂定一個原則：只要沒有連續三日以上都不開店營業就好。例如：此六天(營, 休, 營, 休, 營, 休)表示符合老闆原則的一種開店方法，但(營, 休, 休, 休, 營, 休)未符合老闆原則。試問在滿足老闆原則下，此六天的開店方法數有幾種？_____。

背面尚有試題

11. 直線 $y = \sqrt{3}x$ 上有一點 A ， x 軸上有一點 B ，圓 $(x - 12)^2 + (y - 5)^2 = 4$ 上有一點 C 。求 $\triangle ABC$ 之最小周長為_____。

12. 由0,1,2,3(可重複)所組成長度為4的數字字串滿足：對於每一個小於4的正整數 j ($j=1,2,3$)，數字字串中的數字
至少有 j 個數字不超過 j (例如: 2113 是一個滿足條件的數字字串。但 0333 不是符合要求的數字字串。) ，試問有_____個符合的數字字串。

二、計算證明題 答題：請標註題號並依題序作答，切勿跳題回答，並完整說明。

1. (8 分)試求 $\begin{vmatrix} \tan 40^\circ & \tan 10^\circ & \tan 50^\circ \\ \tan 20^\circ & \tan 50^\circ & \tan 70^\circ \\ \tan 10^\circ & \tan 70^\circ & \tan 80^\circ \end{vmatrix}$ 之值。

2. (10 分)設 x 、 y 、 z 皆為實數， $x^3 + y^4 = z^5$ ，若 $x = 2^{20n+8}$ ， $z = 2^{12n+5}$ ，試求 $6\log_2 x - 32\log_2 y + 30\log_2 z$ 的值。

3. (10 分) $f(x) = \sqrt{x-27} + \sqrt{40-x} + \sqrt{x}$ ，其中 $27 < x < 40$ ，試求 $f(x)$ 最大值為何？

填充題答案

1. 16	7. -21
2. 1120	8. 送分
3. $\begin{bmatrix} -2^n + 2 & 0 & -2^{n+1} + 2 \\ 2^n - 1 & 2^n & 2^n - 1 \\ 2^n - 1 & 0 & 2^{n+1} - 1 \end{bmatrix}$	9. $\frac{2080\pi}{3}$
4. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$	10. 44
5. -96	11. $11\sqrt{3}$
6. 9	12. 232