

--	--

# 臺北市 112 學年度市立普通型暨技術型 高級中等學校正式教師聯合甄選

## 數學科 題本

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答

※請先確認你的答案卡(本)、准考證與座位號碼是否一致無誤。如有不同應立即請監試委員處理。使用非本人答案卡(本)作答者，不予計分。

請閱讀以下測驗作答說明

測驗說明：

這是數學科題本，題本採雙面印刷。測驗時間 100 分鐘，作答開始與結束請聽從監試委員的指示。

作答注意事項：

1. 選擇題由電腦閱卷，限使用 2B 鉛筆作答。劃記不清楚致電腦無法判讀，由應考人員自行負責。
2. 非選擇題以黑筆或藍筆作答。
3. 劃記任何不相關記號及以其他顏色筆作答者不予計分。考試結束，答案卡(本)和試題本務必繳回，未繳回者以零分計算。

請聽到鈴（鐘）聲響後再翻頁作答

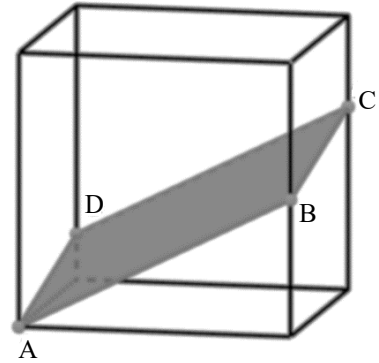
試題公告  
僅供參考

壹、選擇題：佔 20 分（共 4 題，每題 5 分）

單選題

1. 有一正立方體平放在桌面上，而四邊形  $ABCD$  是某一平面截此正立方體所得之圖形。若此正立方體的邊長為 1，且  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三點到桌面的距離分別為  $0$ 、 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{3}$ ，則  $D$  點到桌面的距離為下列哪一個選項？

- (A)  $\frac{1}{6}$   
(B)  $\frac{1}{7}$   
(C)  $\frac{1}{8}$   
(D)  $\frac{1}{9}$



2. 已知方程式  $2x\sin(\pi x)=1$ ，且  $x \in [0,3]$ ，則此方程式共有幾個解？
- (A) 1  
(B) 2  
(C) 3  
(D) 4

3. 一疊撲克牌共 10 張，某種洗牌方式如下：洗完一次後，原第 6 張會變第 1 張，原第 1 張變第 2 張，原第 7 張變第 3 張，原第 2 張變第 4 張， $\dots$  依此類推；換句話說，就是原來的第 1 到 10 張，會依序移到第 2, 4, 6, 8, 10, 1, 3, 5, 7, 9 張。若用此種洗牌方式連續洗了 2023 次後，則第 10 張牌會是一開始的第幾張牌？
- (A) 第 1 張  
(B) 第 4 張  
(C) 第 6 張  
(D) 第 9 張

4. 實力相當的甲乙兩人打桌球，已知兩人不論發球或接球，成功進球的機率都是  $p$ 。當一方發球進球，但是對方沒打進，算連續進球數1球；當一方發球進球對方成功打進球，但下一球沒有進球，算連續進球數2球，依此類推。若要求「連續進球數」的期望值大於等於10球，則  $p$  的最小值為下列哪一個選項？

(A)  $\frac{8}{9}$

(B)  $\frac{9}{10}$

(C)  $\frac{10}{11}$

(D)  $\frac{11}{12}$

貳、非選擇題：佔 40 分（共 8 題，每題 5 分）

1. 建仔與伊森兩人欲測量教學大樓的高度，已知建仔的眼睛距離地面1.8公尺，伊森的眼睛距離地面1.6公尺，建仔在A處站立量測樓頂的仰角為  $\alpha$ ，而伊森從A處朝教學大樓方向直線前進45公尺後，站立量測樓頂的仰角為  $\beta$ （假設一路上皆為水平路面，沒有坡度）。若  $\tan \alpha = \frac{1}{6}$ ， $\tan \beta = \frac{1}{3}$ ，則教學大樓高度為\_\_\_\_\_公尺。
2. 已知直線  $y = x$  和圖形  $y = \log_a x$  恰有相異兩交點  $P$ 、 $Q$ 。假若原點坐標為  $O$ ，且  $P$  點恰好為  $\overline{OQ}$  中點，則  $\overline{OQ}^2$  值為\_\_\_\_\_。
3. 已知橢圓  $\Gamma$  的一頂點為  $(0, 3)$ ， $F_1(-4, 0)$ 、 $F_2(4, 0)$  為其焦點，若點  $A(1, 1)$ ， $P$  為  $\Gamma$  上的動點，則  $\overline{PA} + \overline{PF_2}$  的最大值為\_\_\_\_\_。
4. 已知  $\vec{a} = (6, 8)$ ， $\vec{b} = (\sqrt{1 - \sin \theta}, \sqrt{\sin \theta})$ ，其中  $0 \leq \theta \leq \pi$ ，則  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  的最大值為\_\_\_\_\_。

5. 已知空間一四面體  $ABCD$ ，其頂點坐標分別為  $A(0,0,0), B(1,0,0), C(0,1,0), D(1,1,1)$ ，則此四面體內切球球心的  $x$  坐標為\_\_\_\_\_。(答案不一定要有理化分母)
6. 設  $n$  為正整數，定義  $n$  的各位數的數字和為  $f(n)$ ，  
例如： $f(2023) = 2+0+2+3 = 7$ ， $f(135) = 1+3+5 = 9$ ，  
則滿足  $f(n) + n = 2023$  的所有正整數  $n$  的和為\_\_\_\_\_。
7.  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 4$ ， $\overline{CA} = 5$ ，已知點  $P$  在  $\triangle ABC$  內，且  $P$  至  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$  之距離分別為  $x$ 、 $y$ 、 $z$ ，則  $3x^2 + y^2 + 2yz + 2z^2$  的最小值為\_\_\_\_\_。
8.  $X$  為有限集合，定義函數  $f(X)$  為  $X$  內最大的數，減第二大的數，加第三大的數，減第四大的數，...，依此類推。  
例如：  
 $f(\{3, 6, 10, 1\}) = 10 - 6 + 3 - 1 = 6$ ， $f(\{3, 6, 10, 2, 4\}) = 10 - 6 + 4 - 3 + 2 = 7$ 。  
若  $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 112\}$ ，而  $X$  為  $A$  中的非空子集，則所有  $f(X)$  的和為\_\_\_\_\_。

**參、計算題：佔 40 分（共 4 題，每題 10 分）**

1. 已知一平面上，行星  $E$  以圓形軌道逆時針繞行恆星  $S$ ，行星  $E$  的衛星  $M$  以圓形軌道逆時針繞行行星  $E$ 。阿宗觀察行星  $E$  繞行恆星  $S$  一圈需時 500 天，衛星  $M$  繞行行星  $E$  一圈需時 50 天，試回答下列問題：
- (1) 若阿宗將恆星  $S$  的位置定為坐標原點  $(0,0)$ ，對於阿宗而言第 0 天時行星  $E$  的坐標在  $(400,0)$ ，衛星  $M$  的坐標在  $(401,0)$ 。求第  $t$  天時，衛星  $M$  的坐標 (5 分)。
- (2) 承上題，若  $\angle SEM$  在第 0 天時第一次等於  $180^\circ$ ，求下一次  $\angle SEM = 180^\circ$  時是第幾天。(5 分)

2. 設圖形 $\Gamma$ 的方程式為 $x^2 - xy + y^2 = 3$ ，將 $\Gamma$ 上的每一點繞原點逆時針旋轉 $\theta$ ，所形成的新圖形為 $\Gamma'$  (其中 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ )，試回答下列問題：

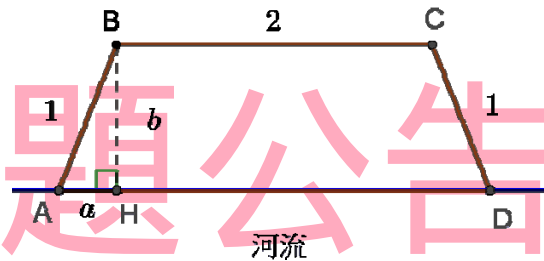
(1) 求圖形 $\Gamma'$ 的方程式。(6分)

(2) 若圖形 $\Gamma'$ 的方程式為 $Ax^2 + By^2 = 1$ ，其中 $A, B$ 為常數，求 $A, B$ 的值。(4分)

3. 如下圖所示，某人用長度分別為 $1, 2, 1$ 的長直竹竿，在筆直的河岸旁圍成一個等腰梯形 $ABCD$ ，其中 $\overline{AB} = \overline{CD} = 1$ ， $\overline{BC} = 2$ ， $\overline{BC}$ 與 $\overline{AD}$ 平行， $\overline{BC} \leq \overline{AD}$ ， $H$ 為 $\overline{AD}$ 上一點，且 $\overline{BH} \perp \overline{AD}$ ，令 $\overline{AH} = a$ ， $\overline{BH} = b$ ，試回答下列問題：

(1) 以 $a, b$ 表示等腰梯形 $ABCD$ 的面積。(2分)

(2) 當等腰梯形 $ABCD$ 有最大面積時，求此時的 $a$ 值。(8分)



試題公告  
僅供參考

4. 平面上一直線 $L$ ， $L$ 上依序有 $A, B, C, D$ 相異四點，亦即 $B$ 在 $\overline{AC}$ 之間， $C$ 在 $\overline{BD}$ 之間，動點 $P$ 在平面上，試回答下列問題：

(1) 求 $P$ 點位置在哪裡時，使得 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ 的值最小。(5分)

(2) 若 $P$ 點不在直線 $L$ 上，且 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，試證 $\overline{PA} + \overline{PD} > \overline{PB} + \overline{PC}$ 。(5分)

臺北市 112 學年度市立普通型暨技術型高級中等學校正式教師聯合甄選

數學科筆試答案卷

壹、選擇題：佔 20 分（共 4 題，每題 5 分）

1.	2.	3.	4.
A	D	B	C

貳、非選擇題：佔 40 分（共 8 題，每題 5 分）

略

參、計算題：佔 40 分（共 4 題，每題 10 分）

略

參考答案