新竹縣立六家高中　112 學年度　第 1 次教師甄選

數學科　試題卷

(請考生自填)　准考證號碼：________________　　姓名：____________

一、填充題【每格 3 分】

1. 已知複數 z, z_1, z_2 $(z_1 \neq z_2)$ 滿足 $z_1^2 = z_2^2 = -2-2\sqrt{3}\,i$，且 $|z-z_1| = |z-z_2| = 4$，則 $|z| =$？

2. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 中，$a_1 = 1$，$a_n = \dfrac{n}{n^2-1}$（$n \geq 2$），則 $\sum_{k=1}^{n}(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_k) =$？(以 n 表之)

3. 令 $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} (t^2+t-3)^3\, dt$，則 $f'(-1) =$？

4. 平面上兩向量 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 滿足 $|2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}| = 2$，$|\overrightarrow{a}-4\overrightarrow{b}| = 1$，若 $|3\overrightarrow{a}+5\overrightarrow{b}|$ 的最大值為 M，最小值為 m，
   則數對 $(M，m) =$？

5. 設函數 $f(x) = \dfrac{x^2+x+16}{x}$，$(2 \leq x \leq m)$，其中實數 $m > 2$，若 $f(x)$ 的值域為 $[\,9, 11\,]$，則 m 值的範圍為何？

6. 設 a, b 皆為實數，求當 $(a-41b-33)^2+(a-42b-34)^2+(a-40b-35)^2+(a-39b-32)^2+(a-38b-31)^2$ 為最小值時的 $(a,b) =$？

7. 有一球體地球儀，半徑為 20 公分，已知 A, B 兩點的座標分別為 $0°N, 15°E$ 與 $45°S, 120°W$，則 A, B 兩地的球面最短距離為何？

8. 已知方程式 $x^3-3x+1=0$ 在 $(1,2)$ 上恰有一根 α，以初始值 $a_0 = 2$ 使用牛頓法一次，可得 α 的近似值 a_1。
   求 a_1 的值。

9. 四面體 $ABCD$ 中，底面 ΔBCD 為邊長 6 的正三角形，而 $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 5$。求直線 AB 與直線 CD 的距離。

10. 一袋中有 5 紅球、6 白球，自袋中每次取出一球，取出不放回，取完為止。若袋中每一球被取中的機會均等。
    計算在取球過程中已取出的紅球個數不大於已取出的白球個數的機率。

二、填充題【每格 5 分】

1. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 中，$a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$（$n \in N$），則 $\sum_{k=1}^{2023}\left({a_{k+1}}^2 - a_k \cdot a_{k+2}\right) =$？

2. 設函數 $f(x) = |2 - log_3 x|$，已知正實數 a, b, c 滿足 $a < b < c$ 且 $f(a) = 2f(b) = 2f(c)$，則 $\dfrac{b}{ac} =$？

3. 六個人排成一列，每個人從紅、黃、藍、白、黑五種顏色的球中任選一個(每種顏色的球都至少有 6 個)，要求任意相鄰兩人所選擇的球均同色或至少有一球為白色，則滿足條件的選球方法有幾種？

4. 在ΔABC中，設M, N分別在邊$\overline{AB}$, $\overline{AC}$上(包含頂點)，且$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$，$D$是$\overline{BC}$的中點，$G$是線段$\overline{MN}$與$\overline{AD}$的交點，若$\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AD}$，則$\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{y^2}$的最小值為何？

5. 求$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)}{n}=$？

6. 已知$y=x^3+kx^2-1$恰有三相異切線過$(0,0)$，求k的範圍。

三、計算與證明題【每題 10 分】

1. 雙曲線Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$($a>0$，$b>0$)，$F_1$, F_2分別為此雙曲線的左、右焦點，$\overline{AB}$為通過F_2的焦弦，點A在第一象限，已知$\overline{AF_2}=3\overline{BF_2}$，$\overline{F_1F_2}=\sqrt{5}a$，$\Delta F_1AB$的面積為$\dfrac{32}{3}$，則$\Delta F_1AB$的內切圓半徑為何？

2. 設數列$\langle a_n\rangle$中，$a_1=\dfrac{\pi}{6}$，$a_n\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，且$\tan a_{n+1}\cdot\cos a_n=1\ (n\geq 1)$

(1) 試求$\tan^2 a_n$的一般式。(以n表之) (5 分)

(2)若$\displaystyle\prod_{k=1}^{m}\sin a_k=\frac{1}{10}$，則$m=$？(5 分)

3. 已知兩數列$<a_n>,<b_n>$，當$n\in\mathbb{N}$時恆存在下列關係:$\begin{cases}a_n=3a_{n-1}+5b_{n-1}\\ b_n=a_{n-1}+7b_{n-1}\end{cases}$，且$a_0=2, b_0=1$，求一般項$a_n$。

4. 重複操作一個成功機率為p的伯努力試驗，每次試驗的結果皆是獨立的，設隨機變數X表示第一次成功發生所需要的試驗次數。(下列答案以p表之)

(1)計算$E(X)$　(5 分)

(2)計算$Var(X)$ (5 分)

新竹縣立六家高中　112 學年度　第 1 次教師甄選

數學科　參考答案

一、填充題【每格 3 分】

1.	$2\sqrt{3}$
2.	$2-\frac{2}{(n+1)!}$
3.	-83
4.	$\left(\frac{41}{9},3\right)$
5.	$4\le m\le 8$
6.	$\left(5,\frac{7}{10}\right)$
7.	$\frac{40}{3}\pi$
8.	$\frac{5}{3}$
9.	$\frac{3\sqrt{39}}{5}$
10.	$\frac{2}{7}$

二、填充題【每格 5 分】

1.	-1
2.	$\frac{1}{9}$
3.	1093
4.	$\frac{85}{9}$
5.	$2\ln 2-1=\ln 4-1$
6.	$k<-3$

三、計算與證明題【每題 10 分】

1.	1
2.	(1) $\frac{3n-2}{3}$ (2) 33
3.	$a_n=\frac{5\cdot 2^n+7\cdot 2^{3n}}{6}=\frac{5\cdot 2^n+7\cdot 8^n}{6}$ ， $n\geq 1$
4.	(1) $\frac{1}{p}$ (2) $\frac{1-p}{p^2}$