國立關西高級中學 112 學年度第 1 次教師甄選題目試卷(含答案)

科別	數學科筆試	說明	■單面 、共 5 頁	准考證末三碼	□□□

一、多重選擇題(全對得 6 分，答錯一個選項得 4 分，答錯二個選項得 2 分，答錯三個選項以上不給分)

1. （ACE）坐標平面上有一圖形Γ，其方程式為$(x-1)^2+(y-1)^2=101$。試選出正確的選項。

   (A)Γ與x軸正向、y軸正向分別交於$(11,0)$、$(0,11)$

   (B)Γ上x坐標最小的點是點$(-9,0)$

   (C)Γ上的點與原點距離的最小值為$\sqrt{101}-\sqrt{2}$

   (D)Γ在第三象限的點之極坐標可用$[9,\theta]$表示，其中$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$

   (E)Γ經旋轉線性變換後，其圖形仍可用一個不含xy項的二元二次方程式表示

2. （ABE）設$P(X)$表示事件X發生的機率，而$P(X|Y)$表示在事件Y發生的條件下，事件X發生的機率。今有 2 顆黑球、2 顆白球、3 顆紅球共 7 顆大小相同的球排成一列。
   設事件A為 2 顆黑球相鄰的事件，事件B為 2 顆黑球不相鄰的事件，而事件C為
   任 2 顆紅球都不相鄰的事件。試選出正確的選項。

   (A)$P(A)<P(B)$

   (B)$P(C)=\frac{2}{7}$

   (C)$2P(C|A)+5P(C|B)>2$

   (D)$P(C|A)>0.2$

   (E)$P(C|B)>0.3$

3. （AD）已知橢圓$5x^2+4xy+8y^2=36$，以原點為中心，逆時針旋轉θ $(0\le\theta<\pi)$，使得長軸在x軸上，則下列選項何者正確？

   (A) $\tan 2\theta=\frac{4}{3}$　(B) $\cos 2\theta=-\frac{3}{5}$　(C) 短軸長為 6　(D) 橢圓面積為6π　(E) 正焦弦長$\frac{4}{3}$。

4. （AB）設$F(x)$、$f(x)$皆為實係數多項式函數。已知$F'(x)=f(x)$，試選出正確的選項。

   (A)若$a\ge 0$，則$F(a)-F(0)=\int_0^a f(t)dt$

   (B)若$F(x)$除以x的商式為$Q(x)$，則$Q(0)=f(0)$

   (C)若$f(x)$可被$x+2$整除，則$F(x)-F(0)$可被$(x+2)^2$整除

   (D)若對所有實數x，$F(x)\ge\frac{x^2}{2}$都成立，則對所有實數x，$f(x)\ge x$也都成立

   (E)若對所有$x>0$，$f(x)\ge x$都成立，則對所有$x>0$，$F(x)\ge\frac{x^2}{2}$也都成立

二、填充題(每題 5 分)

1.去掉含有比 7 大的質因數之正整數，剩下的正整數由小到大排成一數列 $\langle b_k\rangle = \langle 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,$ $15,16,18,20,21,24,25,\cdots\rangle$，則 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{b_k}=$ $\underline{\frac{35}{8}}$。

2. 設 z 為複數，若 $|z|=1$，則 $|z^2-z+2|$ 之最小值為 $\underline{\quad\frac{\sqrt{14}}{4}\quad}$。

3.$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=7$，$\overline{CA}=9$，且 $\overline{AB}$ 的中垂線與 $\overline{AC}$ 邊上的高交於 Q 點，若 $\overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，

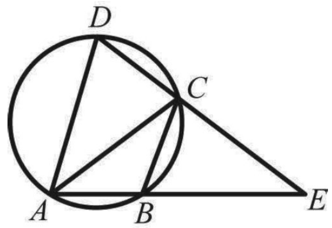
求數對 $(x,y)=$ $\underline{\left(\frac{1}{10},\frac{8}{15}\right)}$。

4. 設 $f(x)$ 為實係數多項式函數，且 $xf(x)=3x^4-2x^3+4x^2+\int_1^x f(t)\,dt$ 對 $x\ge 1$ 恆成立。則 $f(x)=$ $\underline{4x^3-3x^2+8x-4}$。

5. ΔABC 中，$A(4,-1)$，$\angle B,\angle C$ 內角平分線方程式分別為 $2x-y+1=0$ 、 $x-1=0$，則直線 BC 的方程式為 $\underline{2x+y+5=0}$

6. 如下圖，在半徑為 1 的單位圓內接四邊形 $ABCD$，$\overline{AB}$ 的延長線與 $\overline{CD}$ 的延長線交於 E 點，

已知 $\overline{BC}=\overline{CD}$，$\overline{AC}=\overline{CE}$，且 $\frac{\overline{CE}}{\overline{BE}}=\frac{11}{30}$，則 $\overline{BD}=$ $\underline{\quad\frac{48}{25}\quad}$。



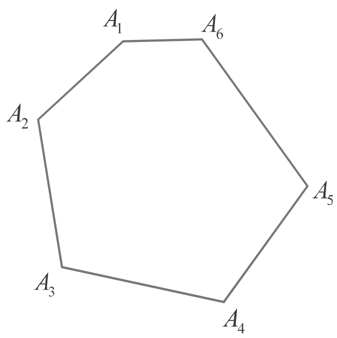
7. 若 a，b，c 為 $x^3-5x^2-3x+7=0$ 的三根，則 $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$ 的值=_____125_____。

8. 設 $a_1,a_2,\cdots,a_{18}$ 均為大於 1 之實數，則 $\dfrac{\log_{a_1}2023+\log_{a_2}2023+\cdots+\log_{a_{18}}2023}{\log_{a_1a_2\cdots a_{18}}2023}$ 之最小值為____324____。

9.從單字 INSTITUTIONALIZED 中任取 4 個字母排成一列，共有 __**9639**__種排法。

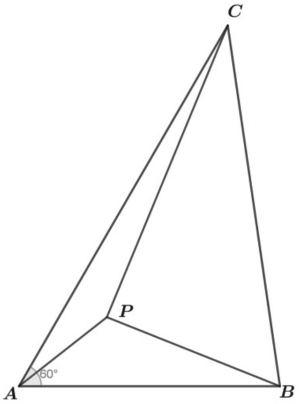
10.動物學家以老鼠為實驗對象進行一項記憶實驗，測試其在迷宮中記憶行為。經實驗，已知老鼠從迷宮某處出發，該處僅能往左及往右兩個方向前進。若往左走則經過 10 分鐘後會回到原地，若往右走則有 $\dfrac{2}{3}$ 的機率於 5 分鐘後回到原地，$\dfrac{1}{3}$ 的機率於 15 分鐘後走出迷宮；假設老鼠向左走的機率為 0.4，問老鼠能夠走出迷宮所花費時間的期望值為 _45_ 分鐘。

11.如下圖，已知凸六邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的六個邊塗紅色。若再將每一條對角線任意塗上紅、黃、藍三種顏色的其中一種，則使得任意一個 $\Delta A_iA_jA_k$ 都至少有一邊是紅色的機率為 $\underline{\dfrac{361}{729}}$。



三、計算證明題(每題 7 分，請詳細寫出計算過程，否則不予給分)

1.如下圖，$\triangle ABC$ 中，已知 P 為 $\triangle ABC$ 內一點，$\overline{AB}=35, \overline{AC}=56, \angle BAC=60°, \overline{AP}=15, \overline{BP}=25$，試求 $\overline{CP}$ 的值。



[解]

由餘弦定理得知， $\cos\angle APB=\dfrac{\overline{AP}^2+\overline{BP}^2-\overline{AB}^2}{2\overline{AP}\times\overline{BP}}=\dfrac{15^2+25^2-35^2}{2\times15\times25}=-\dfrac{1}{2}$

所以 $\angle APB=120°$ 。

作 $\Delta AP'C$ ，使得 $\Delta AP'C\sim\Delta APB$ ，所以 $\overline{AP'}=24$ ，$\overline{CP'}=40$ ，

$\angle BAP=\angle CAP'$ ，$\angle APB=120°=\angle AP'C$ ，因此 $\angle PAP'=60°$ 。

由餘弦定理得知，

$$\overline{PP'}^2=\overline{AP}^2+\overline{AP'}^2-2\overline{AP}\times\overline{AP'}\cos\angle PAP'=15^2+24^2-2\times15\times24\times\frac{1}{2}=21^2$$

所以 $\overline{PP'}=21$ 。

再由餘弦定理得知，

$$\cos\angle AP'P=\frac{\overline{AP'}^2+\overline{PP'}^2-\overline{AP}^2}{2\overline{AP'}\times\overline{PP'}}=\frac{24^2+21^2-15^2}{2\times24\times21}=\frac{11}{14}\Rightarrow\sin\angle AP'P=\frac{5\sqrt{3}}{14}$$

所以 $\cos\angle CP'P=\cos(120°-\angle AP'P)=\cos120°\cos\angle AP'P+\sin120°\sin\angle AP'P=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{11}{14}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{5\sqrt{3}}{14}=\frac{1}{7}$

再由餘弦定理得知，

$$\overline{CP}^2=\overline{CP'}^2+\overline{PP'}^2-2\overline{CP'}\times\overline{PP'}\cos\angle CP'P=40^2+21^2-2\times40\times21\times\frac{1}{7}=1801$$

所以 $\overline{CP}=\sqrt{1801}$

2. 坐標空間中兩直線 $L_1:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{2}$、$L_2:\dfrac{x-6}{-1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-6}{a}$ 交於一點 $Q(x_0,y_0,z_0)$，已知直線 L 過 Q 點與直線 L_1 之銳夾角為 θ，且 L 與 L_1,L_2 所在的平面亦夾 θ 角，其中 $\cos\theta=\dfrac{2}{3}$，試求直線 L 之方程式。

[解]

$$\begin{cases}x=3+t=6-s\\ y=-1-2t=-1-2s\\ z=2t=6+as\end{cases}\Rightarrow t=s=\frac{3}{2}\Rightarrow a=-2\text{ ，得 }Q\left(\frac{9}{2},-4,3\right)\text{。}$$

我們將 L 的方向向量 $\vec{v}$ 分解成 $\vec{v}$ 投影在 L_1,L_2 平面上之向量與垂直 L_1,L_2 平面的向量之和，由題意可知，將 $\vec{v}$ 投影在 L_1,L_2 平面上，可與 L_1 完全重合，故與 $\vec{v_1}$ 平行，令 $|\vec{v}|=3$，又 $\cos\theta=\dfrac{2}{3}$，故 $\vec{v}$ 投影在 L_1,L_2 平面上之向量長度為 2，且

此向量 $=\pm2\dfrac{\vec{v_1}}{|\vec{v_1}|}=\pm\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right)$

垂直 L_1,L_2 平面的向量其長度為 $\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ ，又此向量平行 $\vec{v_1}\times\vec{v_2}=(1,-2,2)\times(-1,-2,-2)=(8,0,-4)$ ，

故垂直 L_1,L_2 平面的向量 $=\pm(2,0,-1)$

所以可得：$\vec{v}=\pm\left(\dfrac{8}{3},-\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3}\right)\vee\pm\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{4}{3},\dfrac{7}{3}\right)$，因此 L 的方程式為：$\dfrac{x-\frac{9}{2}}{8}=\dfrac{y+4}{-4}=\dfrac{z-3}{1}\vee\dfrac{x-\frac{9}{2}}{-4}=\dfrac{y+4}{-4}=\dfrac{z-3}{7}$ 。

3. 已知在停車場中有編號 1 號到 5 號的五個未停車的停車格，現在有五輛車依序入場停車，每輛車的駕駛入場前各自在心中先選定 1~5 號的一個號碼(可重複)，入場後就停入一開始所選號碼的車位，若規定停車時發現預定要停的車位已經停了其他車，則就停下一個號碼的車位，若無車位可停就無法停車。例如：選 3 號的車入場時發現 3 號已經停車了，就停入 4 號車位；若 3 號、4 號都停車了，就停入 5 號車位；但若發現 3 號、4 號、5 號都停車了，就無法順利停入。所以例如一開始五位駕駛依序選定的號碼為 1、4、2、2、5，則四輛車可順利停車；但如果選的四個號碼為 2、2、4、3、3，則無法順利停車。試問五位駕駛共有幾種依序選定號碼的方法，可以讓五輛車順利停車。

[解]

法一：

先多增加一格 6 號停車格，並將 6 個停車格排成環狀，讓五位駕駛依序由 1~6 號任意選定一個號碼，那麼無論選到什麼號碼一定都可以停到車位，並且有一個空車格，顯然"選定的號碼會讓空車格在 6 號"為"選定的號碼可以在原本狀況順利停車"的充要條件。

假設選定號碼為$\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\right)$時會讓第$i$輛車停到$p_i$號車格(例如選定號碼為$\left(2,2,4,3,3\right)$時，五輛車分別停在$2,3,4,5,6$號車格)，那麼號碼為$\left(x_1+j,x_2+j,x_3+j,x_4+j,x_5+j\right)\left(\bmod 6\right)$時會讓第$i$輛車停到$p_i+j\left(\bmod 6\right)$號車格(※註若號碼$\bmod 6$後為 0 即視為 6 號)

號碼$\left(x_1+j,x_2+j,x_3+j,x_4+j,x_5+j\right)\left(\bmod 6\right)$，其中$j=0,1,2,3,4,5$時，這 6 組號碼恰只有一組會讓空位在 6 號

故所求$=\dfrac{(5+1)^5}{6}=1296$。

法二：

討論五個號碼的同異：

(1)五同：$\left(1,1,1,1,1\right)$，1 種。

(2)四同一異：$\left(1,1,1,1,2\right),\left(1,1,1,1,3\right),\left(1,1,1,1,4\right),\left(1,1,1,1,5\right)$或$\left(1,2,2,2,2\right)$，共$5\times\dfrac{5!}{4!}=25$種。

(3)三同二同：$\left(1,1,1,2,2\right),\left(1,1,1,3,3\right),\left(1,1,1,4,4\right),\left(1,1,2,2,2\right),\left(1,1,3,3,3\right)$，共$5\times\dfrac{5!}{3!2!}=50$種。

(4)三同二異：$\left(1,1,1,2,3\sim5\right),\left(1,1,1,3,4\sim5\right),\left(1,1,1,4,5\right),\left(1,2,2,2,3\sim5\right),\left(1,2,3,3,3\right)$，共$10\times\dfrac{5!}{3!}=200$種。

(5)二同二同一異：$\left(1,1,2,2,3\sim5\right),\left(1,1,3,3,4\sim5\right),\left(1,1,2,3,3\right),\left(1,1,2,4,4\right),\left(1,1,3,4,4\right),\left(1,2,2,3,3\right),\left(1,2,2,4,4\right)$，

共$10\times\dfrac{5!}{2!2!}=300$種。

(6)二同三異：$\left(1,1,2,3,4\sim5\right),\left(1,1,2,4,5\right),\left(1,1,3,4,5\right),\left(1,2,2,3,4\sim5\right),\left(1,2,2,4,5\right),\left(1,2,3,3,4\sim5\right),\left(1,2,3,4,4\right)$，

共$10\times\dfrac{5!}{2!}=600$種。

(7)五異：$\left(1,2,3,4,5\right)$，共$5!=120$種。故全部共有1296種。

（試題結束）