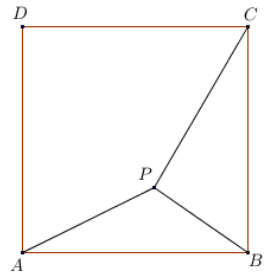


國立金門高中 112 學年度第一次教師甄選數學科試題卷 (共 3 頁)

一、填充題 (每題 6 分，共 60 分)

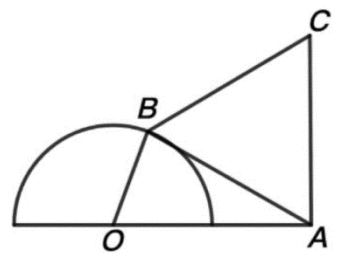
1. 設 P 為正方形 $ABCD$ 的內部一點，其中 $\overline{AP} = 3\sqrt{2}$, $\overline{BP} = 3$, $\overline{CP} = 6$ ，則正方形 $ABCD$ 的面積為 _____。



2. A 箱中有 1 黑 1 白球， B 箱中有 1 白球；每次先由甲自 A 箱隨機取一球放入 B 箱中，再由乙自 B 箱隨機取一球放入 A 箱，這樣稱為一局，以 P_n 表示第 n 局結束時， A 箱中恰一黑一白球的機率，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n =$ _____。

3. 空間中已知兩平行平面 $E_1: x - 2y + 4z = d_1$ 及 $E_2: x - 2y + 4z = d_2$ 的距離為 $\sqrt{6}$ ，平面 $E: x + y + z = 0$ 分別與 E_1 、 E_2 交於直線 L_1 、 L_2 ，試求兩平行線 L_1 、 L_2 的距離為_____。

4. 如右圖(此為參考圖)，半圓 O 的半徑為 1， A 為直徑延長線上一點， $\overline{OA} = 2$ ， B 為半圓上任一點，以 $\overline{AB}$ 為一邊做正三角形 ABC ，求四邊形 $OACB$ 面積的最大值。



5. 假設某彗星在一拋物線形軌道運行。今以地球的地心為原點 O ，地球半徑為 1 單位長，建立一空間坐標系。若彗星位在平面 $z=1$ 上，且投影到 xy 平面時的軌跡方程式為 $x = (y-2)^2 - 5$ ，試求彗星距離地球表面最近時的距離。

6. 對任意正數 x ，定義函數 $f(x)$ 為四數： $\log_{10} x$ 、 $x^2 - 2x + 1$ 、 $2x$ 、 $-x + 1$ 中的最大值，則函數 $f(x)$ 的最小值為_____。

7. 五人進行「剪刀、石頭、布」的猜拳，五人同時出拳，若能分出勝負(例如:三人出剪刀，二人出布時，算是分出勝負；但五人都出剪刀時，不算分出勝負)，則猜拳停止；若分不出勝負，則繼續猜拳，直到分出勝負為止。試求猜拳次數的期望值。

8. 若 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ ，其中 n 為正整數，則 $\frac{b_{20}}{b_{10}}$ 之值為_____。

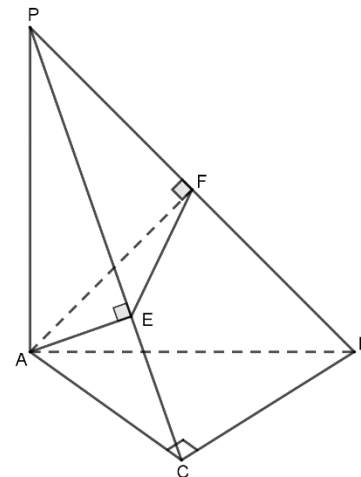
9. 求 2022^{111} 末兩位數是多少？

10. 已知 a, b 為正整數，設函數 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^{2n+1} + ax^2 + bx - 1}{2x^{2n} + 3}$ ，若 $\forall x \in R$ $f(x)$ 為連續函數，則序對 $(a, b) =$ _____。

二、計算與說明題 (每題 10 分，共 40 分)

1. 如右圖，在三角錐 $P-ABC$ 中， $\overline{PA}$ 垂直底面 ABC ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\overline{AF} \perp \overline{PB}$ 、 $\overline{AE} \perp \overline{PC}$ 。

若 $\overline{PA} = \overline{AB} = 2$ ，求 $\triangle AEF$ 的最大面積是多少？

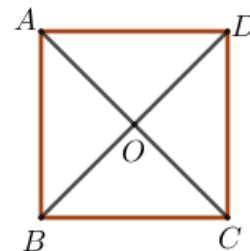


2. 設 x 為有理數，將 $(x+1)(x-2)$ 的小數第一位予以「四捨五入」後所得的整數為 $1+5x$ ，則 x 的值為多少？

3. 某老師任教高一甲、乙兩班，第一次月考高一甲班標準差為 8 分，高一乙班標準差為 12 分，請問將老師任教的高一學生(即將甲乙兩班合併)第一次月考的標準差有可能是下列情形嗎？試說明理由。

- (1) 標準差大於 12 分 (2) 標準差小於 8 分

4. 如圖， O 為正方形 $ABCD$ 的中心。程式設定讓跳跳蛙在圖中諸點之間跳動，每次都可以跳到相鄰的任何一點，例如：由 A 點可跳到 O 、 B 、 D 中的任何一點，由 O 點可跳到 A 、 B 、 C 、 D 中的任何一點。設從 O 點開始，經 n 次跳動返回 O 點的路線有 a_n 種，而經 n 次跳動到達 A 點的路線有 b_n 種。



(1) 試求數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式 (5 分)

(2) 承(1)，試證： $a_n = 2^n F_{n-1}$ ($n \geq 2$)，其中 $\langle F_n \rangle$ 為費氏(Fibonacci)數列 (5 分)

國立金門高中 112 學年度第一次教師甄選數學科答案卷

一、填充題 (每題 6 分，共 60 分)

1	2	3	4	5
45	$\frac{2}{3}$	$\sqrt{7}$	$\frac{5\sqrt{3}}{4} + 2$	$3\sqrt{2} - 1$
6	7	8	9	10
$\frac{2}{3}$	$\frac{27}{10}$	1025	28	(1,3)

二、計算與說明題 (每題 10 分，共 40 分)。

注意：請自行標註題號作答。若本頁空間不足，可於背面繼續書寫。

1. $\frac{1}{2}$
2. $x = -\frac{2}{5}$ 或 $\frac{32}{5}$
3. (1) 可能。
(2) 不可能。
4. (1) $a_n = 4a_{n-2} + 2a_{n-1}$, $n \geq 3$; $a_1 = 0, a_2 = 4$
(2) 略。