國立鳳山高中 112 年教師甄試數學科試題

注意：1. 請依題號順序作答，否則不予計分。

2. 填充題請自行標註題號，只需要填寫正確答案，不需填寫過程。

3. 計算題需要詳細過程，只填寫答案不予計分。

一、填充題(14 題，每題 5 分，占 70 分)

1.最接近 $\frac{2022^4}{2023^3}$ 的正整數為_____。

2.坐標空間中，考慮一長、寬、高分別為 5、3、2 的長方體，並固定一頂點 O。從 O 以外的七個頂點隨機選取相異兩點，設此兩點為 P、Q，試問所得 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 之期望值為_____。

3. ΔABC 中，D 在 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的內角平分線，若 $\overline{BD}=3$，$\overline{DC}=1$，試求 ΔABC 面積的最大值。

4.已知實數 x、y 滿足 $x+y=4\sqrt{x+2}+6\sqrt{y+1}$，當 $x=\alpha$、$y=\beta$ 時 $x+y$ 有最大值，求實數 α 的值為_____。

5. 試求不等式 $(x-2)^6<x^3-x^2+5x-4$ 的解。

6.已知 z 為非零的複數，若 0、z 與 z^3 在複數平面上恰可形成一個正三角形的三個相異頂點，設共有 n 個相異的 z 值，且其中 z 的主幅角（介於 $0°\sim360°$）最大者為 ϕ，則數對 $(n,\phi)=$ _____。

7. 設 $[x]$ 為不大於 x 的最大整數，試求 $\left[(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1000}\right]$ 的末位數字。

8.有一副撲克牌(不含鬼牌)遺失了兩張，若在已知抽出的三張牌皆為紅心的條件下，則遺失的兩張牌中紅心張數的期望值為_____張。(請用最簡分數表示)

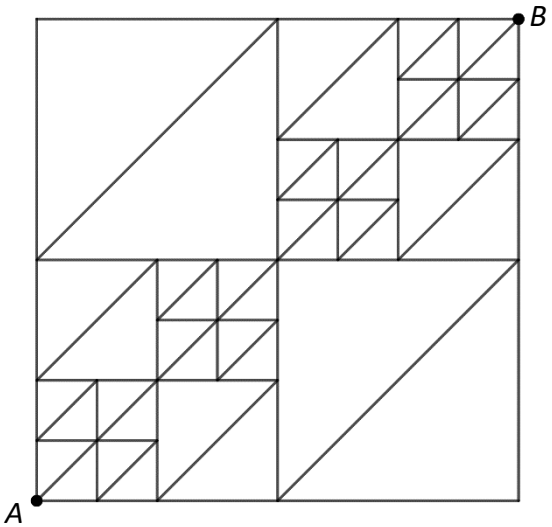
9.設 $A(-1,0), B(2,0)$，$\triangle ABC$ 中，若 $\angle B = 2\angle A$，則 C 點的軌跡方程式為_____。

（注意：必須寫出 x 的範圍，否則不給分。）

10. 假設方程式 $(\log_a x)(\log_a x^2) = 4$ 有兩個均大於 1 的不相等實根，試求實數 a 的範圍。

11.求定積分 $\int_{-\frac{3}{2}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} =$ _____。

12.下圖中的街道圖，欲從 A 點走到 B 點，規定只能沿著街道向東「→」、北「↑」或東北「↗」方向走，則有_____種走法。



13.平面上有三個向量滿足 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ ，滿足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{a}+\vec{b}|=1$ ，且 $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ 、 $\vec{b}\cdot\vec{c}<0$ 。今有實數 x 、 y ，使得 $\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{c}$ 滿足 $0\le\vec{v}\cdot\vec{a}\le1$ 及 $0\le\vec{v}\cdot\vec{b}\le1$ ，則 $\vec{v}\cdot\vec{c}$ 的最小值為_____。

14.設 $P(2,3,-4)$ 為空間中一點，對於每個實數 k ，考慮 P 點與空間中直線 $L_k:\frac{x-k}{2021}=\frac{y-k}{2022}=\frac{z-k}{2023}$ 的距離 d_k ，試求所有 d_k 的最小值。

二、計算證明問答題（共 4 題，占 30 分）

1.學生初學排列組合時，遇到下面的問題：

從甲、乙、丙…等 10 人中選出 4 人，至少含甲、乙、丙、丁四人中的一人，求有幾種選法？

小安的想法如下：

(1)先從甲、乙、丙、丁 4 人中選 1 人(C_1^4)。

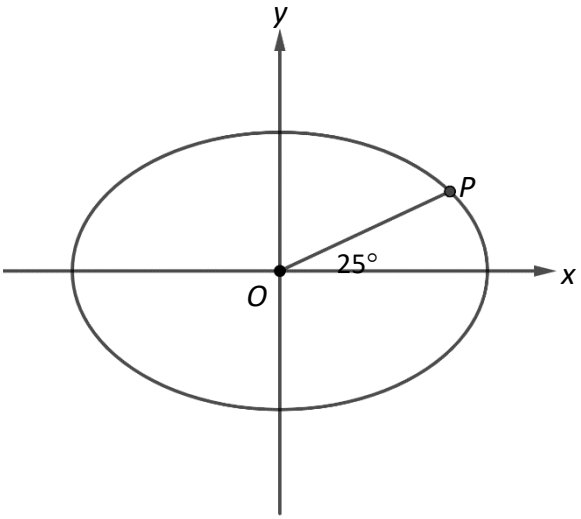
(2)再從其餘 9 人中選 3 人(C_3^9)。

故共有 $C_1^4\times C_3^9$ 種方法。

假如你是小安的數學老師，你應如何跟他解釋這樣的解法不正確？並告訴他正確的解法。(5 分)

2.一橢圓的方程式為$\Gamma:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，其圖形如下圖，已知$P$為橢圓$\Gamma$上一點，且$\overrightarrow{OP}$與$x$軸正向的夾角為25°，若點$Q(3\cos25°, 2\sin25°)$，試以尺規作圖的方式，在下圖中標示出$Q$點的位置。(5分)

（注意：請自行在答案卷畫出圖形，必須說明作圖步驟，不必實際使用圓規或直尺，也不必證明。）



3. 數線上有點$P_1(x_1)$、$P_2(x_2)$、$P_3(x_3)$、……，且對所有正整數n，以下關係皆成立：P_{n+2}為$\overline{P_nP_{n+1}}$上滿足$\overline{P_{n+2}P_n}:\overline{P_{n+2}P_{n+1}}=3:1$的內分點。若$x_1=1$、$x_2=2$，求$\lim_{n\to\infty}x_n$之值。(10分)

4. 設x,y,z為正實數且$xyz=1$，試證明：$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geq x+y+z$。(10分)

國立鳳山高中 112 年教師甄試數學科答案

一、填充題

1	2019
2	$\frac{76}{7}$
3	3
4	$\frac{90+32\sqrt{13}}{13}$
5	$1<x<4$
6	$(4,330°)$
7	1
8	$\frac{20}{49}$
9	$x^2-\frac{y^2}{3}=1 \quad (x>1)$
10	$0<a<\frac{1}{100}$
11	$\frac{\pi}{3}$
12	29933
13	$-\sqrt{3}$
14	$\frac{4\sqrt{6}}{3}$