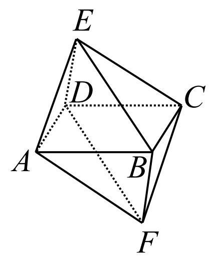
國立嘉義高級中學112學年度第1學期第1次教師甄選—數學科試題

一、 填充題：(每題5分，共90分)

1. 將2023寫成連續正整數的和(至少兩個)的方法數有_________種。

2. 複數平面上，$\Omega_1=\left\{z \mid z\in C \text{ 且 } \left|\frac{1}{z}-1\right|\ge 1\right\}$，$\Omega_2=\{z \mid z\in C \text{ 且 } |z-1|\le 1\}$，求$\Omega_1\cap\Omega_2$的區域面積為_________。

3. 如圖，有一正八面體的兩頂點為$A(2,4,5)$，$C(4,4,7)$，若$G(3,5,6)$在ΔABC的內部，則F點的坐標為_________。



4. 若n為大於5的正整數，且存在實數a,b,c,d,e使得$n^5=aC_5^n+bC_4^n+cC_3^n+dC_2^n+eC_1^n$，則$a+b+c+d+e$之值為_________。

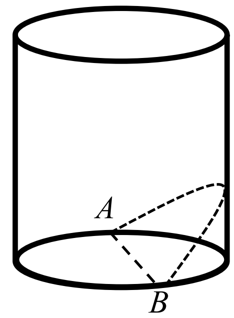
5. 考慮所有只用 0, 1, 2, 3 四種數字組成的序列，序列長度 n 是指該序列由 n 個數字組成（可重複出現）。令$f(n)$為在所有長度 n 的序列中連續兩個零（即00）出現的次數總和。例如長度3的序列中含有連續兩個零的有 000，001，002，003，100，200，300，其中000貢獻2次00，其餘各貢獻1次00，故$f(3)=8$。求$f(9)$有_________個正因數。

6. 若擲四顆相同的公正骰子，當四顆點數乘積為完全平方數時停止，否則再擲一次，請問投擲次數的期望值為_________。

7. 設k為整數，若$\int_3^x |t-5|\,dt=2x-\frac{2023}{k}$有三個相異實根，則$k$有_________個不同的可能值。

8. 有四個平行平面：$E_1: 3x+4y+5z=0$、$E_2: 3x+4y+5z=1$、$E_3: 3x+4y+5z=2$及$E_4: 3x+4y+5z=3$，若一正四面體的四頂點A、B、C、D分別在E_1、E_2、E_3及E_4，則此正四面體和E_2相交的截面積為_________平方單位。

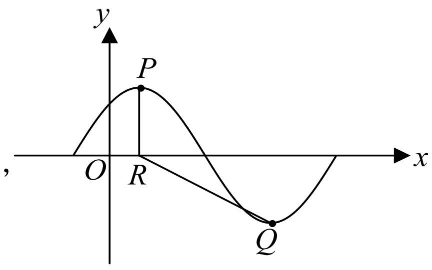
9. 如圖所示，有一個底半徑為6公分的圓柱體，被一個通過直徑AB且與底面夾30°角的平面所截，試求所截出較小塊的立體體積為_________立方公分。



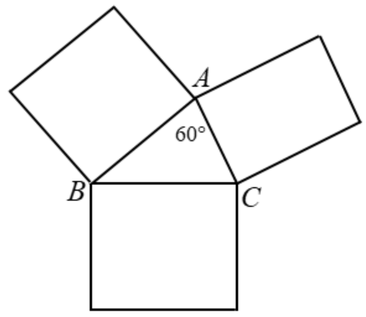
10. 求$1\cdot3\cdot C_1^{16}(\frac{3}{4})(\frac{1}{4})^{15}+2\cdot4\cdot C_2^{16}(\frac{3}{4})^2(\frac{1}{4})^{14}+3\cdot5\cdot C_3^{16}(\frac{3}{4})^3(\frac{1}{4})^{13}+\cdots+16\cdot18\cdot C_{16}^{16}(\frac{3}{4})^{16}$之值_________。

11. 一袋子中共有 8 顆球，其中 5 顆黑球、3 顆白球，每一次從袋中隨機取出 1 球，取後不放回袋中，共取 4 次且排成一列，X 表示取出的 4 球的變色數，如：若取出的 4 球為黑黑黑黑，則 $X=0$，若取出的 4 球為黑白黑黑，則 $X=2$，則 X 的期望值為_________。

12. 右圖為函數 $f(x)=a\sin(\frac{\pi}{3}x+\theta)$ 的部份圖形，其中 $a>0$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$。
若 P,Q 分別為圖形的最高點和最低點，且 $P(1,a)$，$R(1,0)$，$\cos\angle PRQ=-\frac{1}{2}$，
試求 a 值為_________。

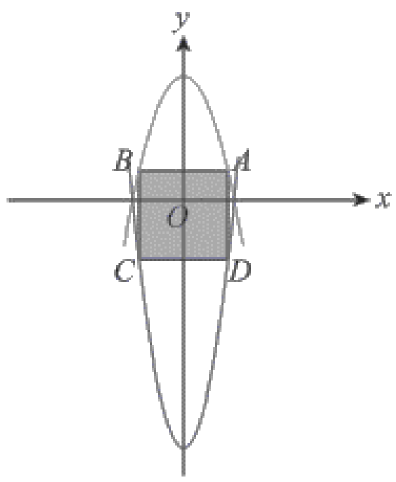


13. 如右圖，ΔABC 中，已知 $\overline{AB}+\overline{AC}=10$ 且 $\angle A=60^\circ$，由三角形各邊向外作寬度為 $2\overline{AC}$ 的長方形，將各邊長方形向上折起，形成一個無蓋的三角柱盒子，則此三角柱盒子的最大容積為_________。



14. 甲地失業率居高不下，為了鼓勵民眾勇於創業，提出了貸款年利率 1.5%，每年複利一次的優惠方案；乙地經濟過熱，為了鼓勵民眾將錢存進銀行，提出了存款年利率 3.53%，每年複利一次的優惠方案。小明突發奇想，從甲地銀行貸款 100 萬後，留下其中的 20 萬自用，並馬上將剩下的 80 萬存入乙地銀行，則最少_________年之後，小明存於乙地銀行的本利和能一次還清在甲地行積欠的貸款。(請取整數，$\log 1.02\approx 0.0086$)

15. 如右圖，在兩拋物線 $y=-x^2+4$ 與 $y=2x^2-8$ 所圍成的區域中，作一內接矩形 $ABCD$，其一組對邊 $\overline{AB}$，$\overline{CD}$ 分別平行於 x 軸，且兩頂點 A，B 在 $y=-x^2+4$ 上，而另兩頂點 C，D 在 $y=2x^2-8$ 上，求矩形 $ABCD$ 的最大面積為_________。



16. ΔABC 中，$\overline{BC}=2,\overline{AC}=3,\overline{AB}=4$，若 O、I 分別為 ΔABC 之外心及內心，
求 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AI}=$_________。

17. 求兩平面 $2x+y+2z+3=0$、$3x+4y-5=0$ 所夾「鈍角」之角平分面方程式為_________。

18. 已知橢圓 $\frac{x^2}{m}+y^2=1$（$m>1$）和雙曲線 $\frac{x^2}{n}-\frac{y^2}{3}=1$（$n>0$）有相同的兩個焦點 F_1,F_2，P 點是它們的一個交點，則 $\tan\angle F_1PF_2=$_________。

二、 計算證明題：(10 分)

1. 若 L 為過原點且與 x 軸正向夾角為 θ 的直線，則對直線 L 的鏡射變換表示的鏡射矩陣為何？請證明之。(7 分)

2. 說明兩個鏡射矩陣相乘的結果為何種幾何變換。(3 分)

國立嘉義高級中學 112 學年度第 1 學期第 1 次教師甄選—數學科答案卷

一、 填充題：(共 18 題，每題 5 分，合計 90 分)

1	2	3	4	5
5	$\dfrac{4\pi-3\sqrt{3}}{12}$	$(2,4,7)$	541	18
6	7	8	9	10
$\dfrac{162}{25}$	135	$\dfrac{\sqrt{5}}{60}$	$48\sqrt{3}$	171
11	12	13	14	15
$\dfrac{45}{28}$	$\sqrt{3}$	$\dfrac{2000\sqrt{3}}{27}$	12	$\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$
16	17	18		
$\dfrac{14}{3}$	x-7y+10z+30=0	$-\sqrt{3}$		

二、計算證明題：(共 10 分) (請自行標記題號，若空間不足可用答案卷背面)