

臺中市立臺中女子高級中等學校 111 學年度第二次教師甄選 數學科 試題

壹、填充題：每格 4 分，全對才給分，共 72 分。

1. 某家蛋捲店有五種口味的蛋捲，分別為原味、抹茶、巧克力、芝麻與咖啡五種；購買時以兩包為一組裝成禮盒，這兩包口味可以一樣，也可以不同。某人想同時買三盒禮盒，試問他有_____種組合方式。

2. 如右圖(示意圖)， $A_n B_n C_n D_n$ 均為正方形， n 為正整數，其中 A_{n+1} 、

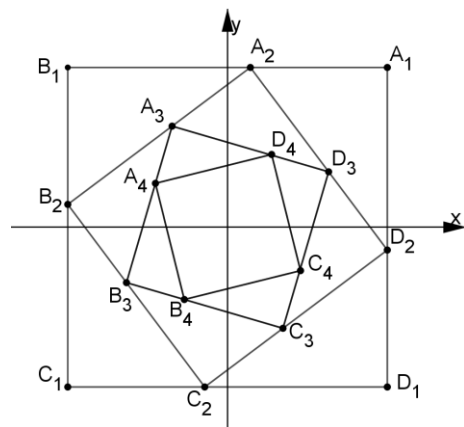
B_{n+1} 、 C_{n+1} 、 D_{n+1} 分別在 $\overline{A_n B_n}$ 、 $\overline{B_n C_n}$ 、 $\overline{C_n D_n}$ 、 $\overline{D_n A_n}$ 上，且滿足

$$\overline{A_n A_{n+1}} : \overline{A_{n+1} B_n} = \overline{B_n B_{n+1}} : \overline{B_{n+1} C_n} = \overline{C_n C_{n+1}} : \overline{C_{n+1} D_n} = \overline{D_n D_{n+1}} : \overline{D_{n+1} A_n} = 3:4。$$

若將這些正方形置於坐標平面上，且 $\overline{A_1 B_1} \parallel \overline{C_1 D_1} \parallel x$ 軸， $\overline{B_1 C_1} \parallel \overline{A_1 D_1} \parallel y$ 軸，

且所有正方形中心均為坐標原點，已知 O 為坐標原點，設 $\overrightarrow{OA_n} = (x_n, y_n)$ ， n 為正整數。

若有一平面線性變換 T 滿足 $\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$ ，試求 $T =$ _____。

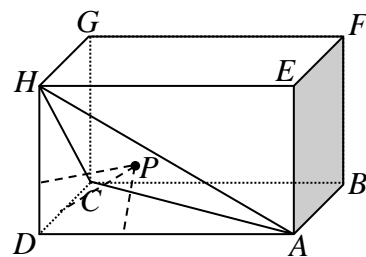


3. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x^2 - 3x + 7} = 3$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ ，且 $f(x)$ 在 $x = -1$ 時有極值。若 $y = f(x)$ 和 $y = k$ 所圍成的兩區域面積相等，則 k 值為_____。

4. 如右圖，在長方體 $ABCD-EFGH$ 中， P 點為 ACH 平面上的一點，

若 $\overline{AD} = 12$ 、 $\overline{DH} = 6$ 、 $\overline{CD} = 6$ ，設 P 點到 \overline{AD} 、 \overline{DH} 、 \overline{CD} 三邊

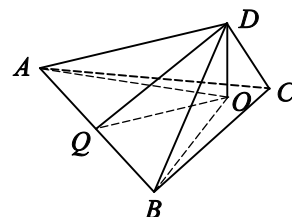
的距離分別為 d_1 、 d_2 、 d_3 ，則 $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ 的最小值為_____。



5. 設 R 代表坐標平面上由不等式 $1 - \sqrt{4 - y^2} \leq x \leq 0$ 所定義的區域，求函數 $3x - y$ 在區域 R 上的最大值 M 與最小值 m ，試問 $M + m =$ _____。

6. 已知 $ABCD$ 為圓內接四邊形，且 $\overline{AB} = 2$ 、 $\overline{BC} = 3$ 、 $\overline{CD} = 4$ 、 $\overline{AD} = 4$ ，若 $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$ ，則 $x - y$ 之值為_____。

7. 四面體 $ABCD$ 中， $\triangle ABC$ 與 $\triangle ABD$ 的面積分別為 15 與 12， $\overline{AB} = 3$ ， D 在 $\triangle ABC$ 之投影點為 O ， $\triangle ABC$ 與 $\triangle ABD$ 之二面角為 30° ，則四面體 $ABCD$ 的體積為_____。



8. 已知兩複數 z_1 和 z_2 滿足 $|z_1|=1$ ， $|z_2|=2$ ， $|z_2-3-4i|=3$ 。若 $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$ ，且 z_1 的實部為正數，則 $z_1=$ _____。

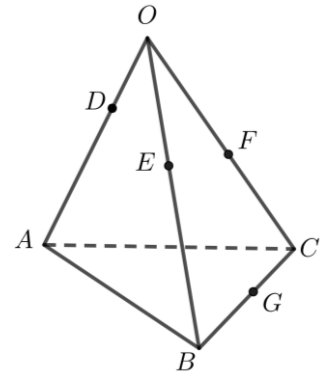
9. 拋物線 $\Gamma: y^2=4x$ 焦點為 F ，已知直線 L 斜率為 2，且 L 和 Γ 交於 A, B 兩點。若 $\overline{AF}+\overline{BF}=4$ ，則 \overline{AB} 長度為_____。

10. 將 $(x-\sqrt{3})^{50}+(x+1)^{50}$ 展開得多項式 $a_{50}x^{50}+a_{49}x^{49}+a_{48}x^{48}+\dots+a_1x+a_0$ ，設 $a_0-a_2+a_4-a_6+\dots+a_{48}-a_{50}$ 之值為 k ，則 $\log_4|k|$ 之值為_____。

11. 一圓周上有六個等分點按順時針順序依次記為 A, B, C, D, E, F 。考慮如下遊戲：開始時將一石子放在出發點 A ，今投擲一骰子，若擲出偶數點，則石子順時針前進兩個等分點；若出現奇數點，則石子順時針前進一個等分點。當石子恰好停在 A 點時，則遊戲結束。試問遊戲結束時，石子恰繞圓兩圈的機率為_____。

12. 求 $y=\frac{x}{3}(x-3)$ 與 $x=\frac{y}{3}(y-3)$ 所圍區域的面積為_____。

13. 如右圖，正四面體 $OABC$ 之邊長為 $6\sqrt{2}$ ， D, E, F, G 四點分別在 $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{BC}$ 上。若 $\overline{OD}=\frac{1}{6}\overline{OA}$ ， $\overline{OE}=\frac{1}{3}\overline{OB}$ ， $\overline{OF}=\frac{1}{2}\overline{OC}$ 且 G 為 \overline{BC} 中點，則四面體 $DEFG$ 之體積為_____。



14. 設過 $P(-2,5)$ 之直線 L 與圓 $C: x^2+y^2+2x-6y-3=0$ 交於 A, B 兩點。若 $\overline{PA}:\overline{PB}=1:2$ ，則 L 之斜率為_____。

15. 設 x, y, z 為實數，且滿足 $\begin{cases} -2 \leq x+y+2z \leq 3 \\ -3 \leq y+2z \leq 1 \\ -4 \leq x+2y+5z \leq 3 \end{cases}$ 。當 $(x, y, z) = (p, q, r)$ 時， $2x-3y-8z$ 有最大值為 m ，

則序組 $(p, q, r, m) =$ _____。

16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^6} \sum_{k=1}^n [(n^2+nk+k^2)(n+k)^3] =$ _____。

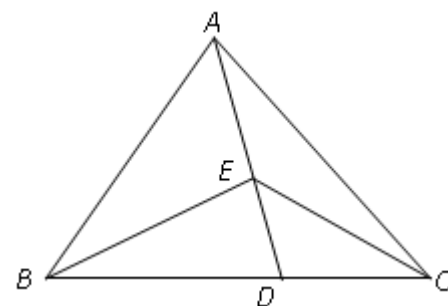
17. 設 a, b, c 為正實數且 $a+b^2+c^4=28$ ， $abc=64$ ，則 $a+b+c=$ _____。

18. 設 $\langle a_n \rangle$ 為一公差不為 0 的等差數列，已知 a_1 為 a_2 和 a_3 的等比中項，且 S_n 為數列 $\left\langle a_n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\rangle$ 的前 n 項和。若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 5$ ，則

數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項 $a_1 =$ _____。

貳、計算證明題：請寫出詳細計算與證明過程，否則不予給分，共 28 分。

1. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， D 在 \overline{BC} 上且 E 在 \overline{AD} 上，若 $\angle BED = 2\angle CED = \angle A$ ，求證： $\overline{BD} = 2\overline{CD}$ 。(10 分)



2. $\triangle ABC$ 中，令 $\overline{BC} = a$ ， $\overline{AC} = b$ ， $\overline{AB} = c$ 。若 a, b, c 成等差，試求 $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}$ 之值。(6 分)

3. 考慮一系列方程式 $x-1=0$ 、 $x^2-x-1=0$ 、 $x^3-x^2-x-1=0$ 、 \dots 、 $x^k-x^{k-1}-x^{k-2}-\dots-x-1=0$ 、 \dots ，

若已知：對任意正整數 k ，方程式 $x^k-x^{k-1}-x^{k-2}-\dots-x-1=0$ 都恰有一個正實根。

(1) 設方程式 $x^k-x^{k-1}-x^{k-2}-\dots-x-1=0$ 的唯一正實根為 α_k (k 為任意正整數)，試證：無窮數列 $\langle \alpha_k \rangle$ 為收斂數列。(6 分)

(2) 試證 $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 2$ 。(6 分)

准考證編號：

臺中市立臺中女子高級中等學校 111 學年度第二次教師甄選 數學科 答案卷

說明：1.作答時，請將答案填入正確格子中。

2.答案卷背面，請勿當草稿紙使用。

壹、填充題（每格 4 分，全對才給分，共 72 分。）

1. 680	2. $\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	3. $-\frac{2}{27}$	4. 32
5. $3+\sqrt{3}-2\sqrt{10}$	6. $\frac{25}{22}$	7. 20	8. $\frac{3+4\sqrt{3}}{10} + \left(\frac{4-3\sqrt{3}}{10}\right)i$
9. $\sqrt{15}$	10. $\frac{49}{2}$	11. $\frac{441}{2048}$	12. 24
13. 3	14. $0\sqrt{\frac{4}{3}}$	15. (6, 5, -4, 29)	16. $\frac{161}{20}$
17. $16+3\sqrt{2}$	18. -10		

貳、計算證明題（請寫出詳細計算與證明過程，否則不予計分，共 28 分。）

1. (10 分) 略
2. (6 分) 答案： $\frac{1}{3}$
3. (12 分) 略