

臺中市立臺中第一高級中等學校 111 學年度第 1 次教師甄選 數學科 試題卷

一、填充題(甲)(每題 4 分，共 24 分。)

1. 當 $x > 0$ 時，令 $[x]$ 表示 x 的整數部分， $\{x\}$ 表示 x 的小數部分，如 $[20.22] = 20$ 且 $\{20.22\} = 0.22$ 。

求最小正數 x 使得 $[x] \cdot \{x\} \geq 3$ ，則 $x =$ _____。

2. 設 P 為正 $\triangle ABC$ 內部一點，若 P 點依序到三邊 \overline{BC} 、 \overline{AC} 、 \overline{AB} 之距離比為 $1:3:2$ ，則 $\overline{PA}^2 : \overline{PB}^2 : \overline{PC}^2$ 為_____。

3. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和為 S_n ，首項 $a_1 = \frac{1}{4}$ ，且滿足 $a_n + 3S_n S_{n-1} = 0$ ($n \geq 2, n \in N$)，則 $\frac{1}{S_{2022}} =$ _____。

4. $\triangle ABC$ 為直角三角形，其中 $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AC} = 16$ ， $\overline{BC} = 5$ ，以 C 為圓心，半徑為 4 作一個圓 Γ ，若 D 為圓 Γ 上一個動點，則 $\frac{1}{4} \overline{AD} + \overline{BD}$ 的最小值為_____。

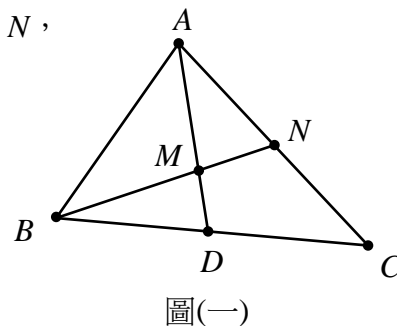
5. 定義在 R 上的函數 $f(x)$ ，對任意的實數 x 均滿足 $f(x+3) \leq f(x)+3$ ， $f(x+2) \geq f(x)+2$ ，且 $f(1) = 3$ ，則 $f(2022)$ 的值為_____。

6. 求 $\int x^2 \ln x dx =$ _____。

二、填充題(乙)(每題 6 分，共 54 分。)

1. 設 $A_1 A_2 \cdots A_{111}$ 為一單位圓的內接正 111 邊形，且 P 為此單位圓上任一點。試求 $\overline{PA_1} \times \overline{PA_2} \times \cdots \times \overline{PA_{111}}$ 的最大值為 _____。

2. 如右圖(一)， $\triangle ABC$ 中， D 為 \overline{BC} 中點， M 為 \overline{AD} 上的任一點。直線 \overline{BM} 交 \overline{AC} 於 N ，直線 \overline{AB} 是 $\triangle NBC$ 外接圓的切線。若 $\frac{\overline{BC}}{\overline{BN}} = \frac{5}{4}$ ，求 $\frac{\overline{BM}}{\overline{MN}} =$ _____。



3. 已知 $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot 2^k}{(k+1) \cdot (k+2)}$ ， $B_n = \sum_{k=1}^n 2^k$ ， $n \in \mathbb{N}$ ，求滿足 $|(n+2)A_n - B_n| > 2022$ 之最小自然數 $n =$ _____。

4. 設一數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} > a_n (n \in \mathbb{N})$ 且 $(a_{n+1})^2 + (a_n)^2 + 1 = 2(a_{n+1} \cdot a_n + a_{n+1} + a_n)$ 。令 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ，試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{na_n} =$ _____。

5. 已知實數 $x > 0$ 且 y, z 均為實數，求聯立方程式 $\begin{cases} 5\left(x + \frac{1}{x}\right) = 12\left(y + \frac{1}{y}\right) = 13\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$ 的解 (x, y, z) 為 _____。

6. 將一個半徑 1 的小球，放入一個稜長為 $4\sqrt{6}$ 的正四面體容器內，小球可在容器內自由移動，則小球永遠不可能接觸到的容器內壁面積為 _____。

7. 設 $a > 0, b > 0, c > 0$ ，求 $\frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c} + 17$ 的最小值為_____。

8. xy 平面上有一質點可任意運動，其在 x 軸上的運動速度為 2 公尺/秒，不在 x 軸上的運動速度為 1 公尺/秒。試求該質點從原點出發在 1 秒內可能到達區域所圍成的面積為_____。

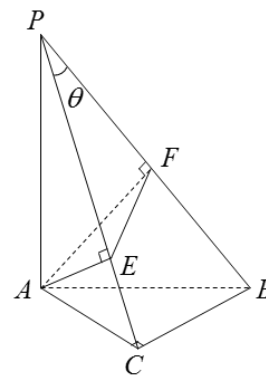
9. 從正整數 $1 \sim 2022$ 中任取 n 個數 ($n \geq 2$)，此 n 個數中兩兩互質且至少有一個質數 (如 $n = 3$ 時，可找到 1, 4, 9 滿足兩兩互質，但 1, 4, 9 均不為質數)，則滿足此條件之 n 的最小值為_____。

三、計算與證明題 (請先標示題號，再詳列計算/證明過程，未有過程僅有答案者不給分。共 22 分。)

1. 如右圖，在三角錐 $P-ABC$ 中， \overline{PA} 垂直底面 ABC ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\overline{AF} \perp \overline{PB}$ 、 $\overline{AE} \perp \overline{PC}$ 。

若 $\overline{PA} = \overline{AB} = 2$ 、 $\angle BPC = \theta$ ，則

(1) 求 $\triangle AEF$ 的最大面積為何？(5 分) (2) 承(1)，此時 $\tan \theta$ 的值為何？(5 分)



2. 已知拋物線 $y^2 = 6x$ 上有兩個動點 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，其中 $x_1 \neq x_2$ 且 $x_1 + x_2 = 4$ 。若 \overline{AB} 的垂直平分線交 x 軸於 C 點，試回答下列問題：

(1) C 點坐標為何？(2 分)

(2) 設 $M(x_0, y_0)$ 為 \overline{AB} 的中點，則 y_0 的範圍為何？(4 分)

(3) 求 $\triangle ABC$ 面積的最大值為何？(6 分)

臺中市立臺中第一高級中等學校 111 學年度第 1 次教師甄選
數學科 答案卷

初閱	複閱

請由此開始書寫↓

一、填充題(甲)(每題 4 分，共 24 分。)

1.	$\frac{19}{4}$	2.	19:7:13	3.	6067
4.	$\sqrt{26}$	5.	2024	6.	$\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$

二、填充題(乙)(每題 6 分，共 54 分。)

1.	2	2.	$\frac{25}{16}$	3.	2023
4.	$\frac{1}{3}$	5.	$\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, 1\right)$	6.	$72\sqrt{3}$
7.	$12\sqrt{2}$	8.	$2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$	9.	16

三、計算與證明題簡答

1. (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. (1) $(5, 0)$ (2) $-2\sqrt{3} < y_0 < 2\sqrt{3}$ (3) $\frac{14\sqrt{7}}{3}$