# 國立屏東高級中學111學年度正式教師甄試數學科筆試試題卷 第1頁/共兩頁

## 一、填充題（共10題，每題6分，共60分）

1. 設 $x$ 為實數且滿足 $f(x+7) \le f(x)+7$，$f(x+3) \ge f(x)+3$，若 $f(235)=220$，求 $f(1012)$=_______。

2. 設 $a, b$ 為方程式 $x^2+3x+9=0$ 的二根，求 $\frac{a}{b}+\left(\frac{a}{b}\right)^2+\cdots+\left(\frac{a}{b}\right)^{2022}$ 之值為_______。

3. 設 $a>b>c>d>e>0$，若 $\log_{\frac{a}{b}}20+\log_{\frac{b}{c}}20+\log_{\frac{c}{d}}20+\log_{\frac{d}{e}}20 \ge k\log_{\frac{a}{e}}20$ 恆成立，求 $k$ 之值為_______。

4. 已知橢圓 $9x^2+(y-a)^2=9$ 與拋物線 $y=2x^2$ 有交點，求 $a$ 之值的範圍為_______。

5. 四邊形 $ABCD$ 中，兩對角線長分別為 $AC=7$，$BD=5$，則 $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$ =_______。

6. 設擲筊時出現聖杯的機率為0.5，求第5個聖杯出現在第10次擲筊之後的機率為_______。

7. 在坐標平面上，令點 $O$ 為原點、點 $A$ 為 $(0,3)$。已知直線 $L_1$ 通過點 $A$，且和直線 $L_2: 5x-12y=0$ 以及 $x$ 軸正向分別交於點 $B$、點 $C$。若三角形 $\Delta OBC$ 周長為30，試求三角形 $\Delta OAC$ 的面積_______。

8. 高斯符號定義如下：$[x]$=不大於 $x$ 的最大整數。

   試求解方程式 $\left[\dfrac{23x-7}{4}\right]=\dfrac{13x+5}{3}$，$x=$__________。（答案不唯一，全對才給分）

9. 試求整數 $\displaystyle\sum_{0\le i<j\le 111}\left(C_i^{111}\cdot C_j^{111}\right)$ 除以29的餘數=_______。

10. 艾莉絲跟巴柏賭錢，規則如下：兩人輪流丟擲同一個不公正的硬幣（該硬幣出現正面的機率為 $\dfrac{2}{5}$、反面的機率為 $\dfrac{3}{5}$）。如果出現正面，則艾莉絲要給巴柏1元；反之，如果出現反面，則巴柏要給艾莉絲1元。

    如果遊戲開始的起始籌碼是：艾莉絲有4元、巴柏有3元。試求艾莉絲將巴柏的錢全部贏光的機率=__________。

## 二、計算證明題（共5題，每題8分，共40分）

11. 設正整數 $a_i \ne 110$，$i=1,2,\ldots,2500$，若其中任意一些連續項的和均不等於110，求 $\sum_{i=1}^{2500}a_i$ 的最小值?

12. 所有正整數從小排列到大，求與105互質的第1204項的數為何?

13. 已知 $n,m$ 皆為正整數，試求定積分 $\int_0^{\pi}(\pi-x)^m x^n\,dx=$__________

    （答案可以 $n,m$ 及高中階段常見之標準數學記號表示）



（背面還有試題）

14. 若線性方程組$L:\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$在坐標空間中代表三個平面，兩兩相交於一線，且三交線兩兩互相平行，試證明：$\Delta_x=\begin{vmatrix}d_1&b_1&c_1\\d_2&b_2&c_2\\d_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$、$\Delta_y=\begin{vmatrix}a_1&d_1&c_1\\a_2&d_2&c_2\\a_3&d_3&c_3\end{vmatrix}$、$\Delta_z=\begin{vmatrix}a_1&b_1&d_1\\a_2&b_2&d_2\\a_3&b_3&d_3\end{vmatrix}$不全為$0$。

15. 已知$x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$皆為正實數，其中$n\geq 2$，試證明：

$$\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^n+\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n+\ldots+\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^n+\left(\frac{x_n}{x_0}\right)^n\geq\left(\frac{x_0}{x_1}\right)+\left(\frac{x_1}{x_2}\right)+\ldots+\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)+\left(\frac{x_n}{x_0}\right)$$

# 國立屏東高級中學 111 學年度正式教師甄試數學科筆試參考答案

## 一、填充題（共 10 題，每題 6 分，共 60 分）

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 997 | 0 | 16 | $-3 \leq a \leq \frac{25}{8}$ | 24 | $\frac{193}{512}$ |
| **7** | **8** | **9** | **10** | | |
| $9\sqrt{6}$ | $\frac{34}{13},\frac{37}{13},\frac{40}{13}$ | 11 | $\frac{1755}{2059}$ | | |

## 二、計算證明題（共 5 題，每題 8 分，共 40 分）

11. 4920
12. 2633
13. 略
14. 略
15. 略

國立屏東高級中學
教師甄選委員會