

高雄市 111 學年度市立高級中等學校聯合教師甄選

數學科試題卷

【※答案一律寫在答案本上】

(一)、計算題:請寫下完整計算過程,否則不予計分。

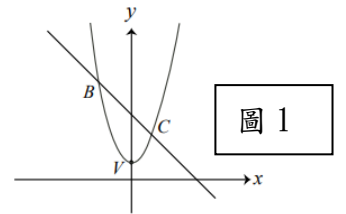
(1)~(14)題,每題 6 分,共 84 分。

1. 設 A 、 B 兩箱中, A 箱內有一黑一白共兩球, B 箱內則有一白球。甲乙二人輪流取球,每次先由甲自 A 箱內任取一球,放入 B 箱內,再由乙自 B 箱內任取一球,放回 A 箱內,這樣稱為一局。若重複數局,當達到穩定狀態時, A 箱內有一黑一白球之機率為何?

2. 解不等式 $|3x-10| - |x^2-6x+5| > 5$ 。

3. 如圖 1。 $a > \frac{1}{2}$, 拋物線 $y = ax^2 + 2$ 之頂點為 V 且與 $y = -x + 4a$ 相交於 B 、 C 兩點。

已知 $\triangle VBC$ 面積為 $\frac{72}{5}$, 試求 a 之值。



4. 若 $x > 0$, 試求函數 $f(x) = \sqrt{x^2 + (\log_2 x)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (\log_2 x - 1)^2}$ 的最小值?

5. 設 $x^4 + x^3 - 4x^2 - 3x + k = 0$ 有兩根和為 -1 , 求此方程式所有解?

6. 數列 $\{a_n\}$ 滿足遞迴關係式 $\begin{cases} a_1 = 3, a_2 = \frac{7}{4} \\ a_n + \alpha = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \alpha), n \geq 2 \end{cases}$, 其中 α 為常數, 則

$a_{10} = ?$

7. 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足關係式 $\log_{n+1} a_n = 1 + \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}$ ，若 $\frac{a_n}{n+1} < 1.2$ ，則自然數 n 的

最小值為？

8. 坐標平面上有一個橢圓，已知在 $(8, 4)$ 、 $(9, 11)$ 、 $(15, 5)$ 和 $(16, 12)$ 這四個點中，有兩個是焦點，另外兩個是頂點，則此橢圓的長軸長度 = _____。

9. 坐標平面上， x 坐標與 y 坐標均為整數的點稱為格子點。令 n 為正整數， T_n 為平面上以直線 $y = \frac{-1}{2n}x + 3$ ，以及 x 軸、 y 軸所圍成的三角形區域（包含邊界），

而 a_n 為 T_n 上的格子點數目，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} =$ _____。

10. 美國職業籃球 *NBA* 總決賽採用 7 戰 4 勝制，即若某隊先取得 4 場的勝利，則比賽結束。根據非官方的統計，任兩隊在每一場決賽中取勝的機率相等，且主辦一場決賽，主辦單位有機會透過出售電視轉播權、門票、廣告費及週邊零售商品等收入中獲取的收益達 2400 萬美元，試預估該年度主辦單位在總決賽中收益的期望值為多少萬美元？

11. 在座標平面上 $\triangle ABC$ 內部有一點 P ，若 $\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCA$ 其面積比為 3:1:2，

且 $|2\overline{NA} + 4\overline{NB} + 6\overline{NC}| = 36$ ，求 $|\overline{NP}| =$ _____

12. 在座標平面上，已知 $A = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}$ 是以直線 L 為鏡射軸的鏡射矩陣，試求鏡

射軸 L 的直線方程式 _____

13. 現有一方陣 A_n ，其內部的元依以下規則排列

$A_1 = [1]$ ， $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ， $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ ，請問 A_{32} 的第 12 列第 24 行的元為 _____

14. 若 $\vec{a} = (2, 1, -1)$ ， $\vec{b} = (1, 3, 2)$ ， $\vec{c} = (-2, 3, 1)$ 則 $|\vec{a} - s\vec{b} - t\vec{c}|$ 之最小值為 _____

(二)、題組題:每題 8 分，共 16 分

1. 若 m 、 n 均為正整數且 $m \geq 2$ 。鋸齒數列 (m, n) 為有 n 個齒，且每個齒從 1 開始往上至 m 後再往下至 1。例如鋸齒數列 $(3, 4)$ 如圖 2 所示

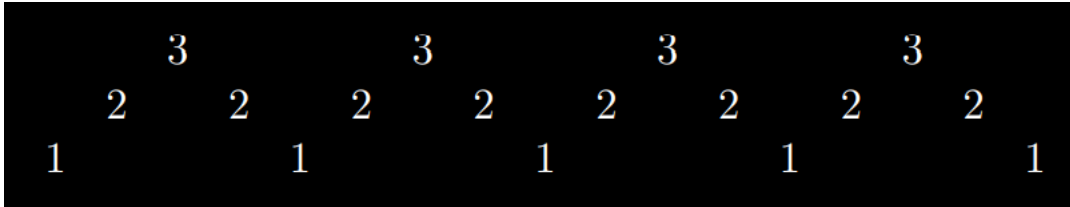


圖 2

由上圖可知鋸齒數列 $(3, 4)$ 包含 17 個正整數且其平均為 $\frac{33}{17}$ 。若鋸齒數列 (m, n) 的所有數字和為 145，請找出所有可能之數對 (m, n) 。

2. 設四次多項式 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ 。

(1) 選取積分區間 $a \leq x \leq b$ ，使得定積分 $\int_a^b f(x) dx$ 達到最小值，並求此最小值。

(2) 設 $c > 0$ ，求證 $\int_{-c}^c f(x) dx$ 恆為正值。

高雄市 111 學年度市立高級中等學校聯合教師甄選

數學科解答卷

【※答案一律寫在答案本上】

(一)、計算題:請寫下完整計算過程,否則不予計分。

(1)~(14)題,每題 6 分,共 84 分。

1. 設 A 、 B 兩箱中, A 箱內有一黑一白共兩球, B 箱內則有一白球。甲乙二人輪流取球,每次先由甲自 A 箱內任取一球,放入 B 箱內,再由乙自 B 箱內任取一球,放回 A 箱內,這樣稱為一局。若重複數局,當達到穩定狀態時, A 箱內有一黑一白球之機率為何?。

A: $x = \frac{2}{3}$

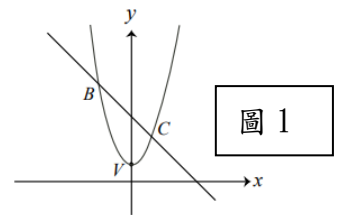
2. 解不等式 $|3x-10| - |x^2-6x+5| > 5$ 。

A: $0 < x < \frac{9-\sqrt{41}}{2}$

3. 如圖 1。 $a > \frac{1}{2}$, 拋物線 $y = ax^2 + 2$ 之頂點為 V 且與 $y = -x + 4a$ 相交於 B 、 C 兩點。

已知 ΔVBC 面積為 $\frac{72}{5}$, 試求 a 之值。

A: $a = 0, \frac{1}{20}, \frac{5}{2} \Rightarrow a = \frac{5}{2}$ (因為 $a > \frac{1}{2}$)



4. 若 $x > 0$, 試求函數 $f(x) = \sqrt{x^2 + (\log_2 x)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (\log_2 x - 1)^2}$ 的最小值?

A: $\sqrt{26}$

5. 設 $x^4 + x^3 - 4x^2 - 3x + k = 0$ 有兩根和為 -1 ，求此方程式所有解？

A: $\pm\sqrt{3}, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

6. 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足遞迴關係式 $\begin{cases} a_1 = 3, a_2 = \frac{7}{4} \\ a_n + \alpha = \frac{1}{2}(a_{n-1} + \alpha), n \geq 2 \end{cases}$ ，其中 α 為常數，則

$a_{10} = ?$

A: $\frac{517}{1024}$

7. 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足關係式 $\log_{n+1} a_n = 1 + \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}$ ，若 $\frac{a_n}{n+1} < 1.2$ ，則自然數 n 的

最小值為？

A: 12

8. 坐標平面上有一個橢圓，已知在 $(8, 4)$ 、 $(9, 11)$ 、 $(15, 5)$ 和 $(16, 12)$ 這四個點中，有兩個是焦點，另外兩個是頂點，則此橢圓的長軸長度 = _____。

A: $10\sqrt{2}$

9. 坐標平面上， x 坐標與 y 坐標均為整數的點稱為格子點。令 n 為正整數， T_n 為平面上以直線 $y = \frac{-1}{2n}x + 3$ ，以及 x 軸、 y 軸所圍成的三角形區域（包含邊界），而 a_n 為 T_n 上的格子點數目，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案：12

10. 美國職業籃球 *NBA* 總決賽採用 7 戰 4 勝制，即若某隊先取得 4 場的勝利，則比賽結束。根據非官方的統計，任兩隊在每一場決賽中取勝的機率相等，且主辦一場決賽，主辦單位有機會透過出售電視轉播權、門票、廣告費及週邊零售商品等收入中獲取的收益達 2400 萬美元，試預估該年度主辦單位在總決賽中收益的期望值為多少萬美元？

A: 13950 萬美元。

11. 在座標平面上 $\triangle ABC$ 內部有一點 P ，若 $\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCA$ 其面積比為 3:1:2，

且 $|2\vec{NA} + 4\vec{NB} + 6\vec{NC}| = 36$ ，求 $|\vec{NP}| = \underline{\hspace{2cm}}$

A: 3

12. 在座標平面上, 已知 $A = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}$ 是以直線 L 為鏡射軸的鏡射矩陣, 試求鏡射軸 L 的直線方程式 _____

A: $4x - 3y = 0$

13. 現有一方陣 A_n , 其內部的元依以下規則排列

$A_1 = [1], A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$, 請問 A_{32} 的第 12 列第 24 行的元為 _

A: 598

14. 若 $\vec{a} = (2, 1, -1), \vec{b} = (1, 3, 2), \vec{c} = (-2, 3, 1)$ 則 $|\vec{a} - s\vec{b} - t\vec{c}|$ 之最小值為 _____

A: $\frac{4\sqrt{115}}{23}$

(二)、題組題: 每題 8 分, 共 16 分

1. 若 m, n 均為正整數且 $m \geq 2$ 。鋸齒數列 (m, n) 為有 n 個齒, 且每個齒從 1 開始往上至 m 後再往下至 1。例如鋸齒數列 $(3, 4)$ 如圖 2 所示

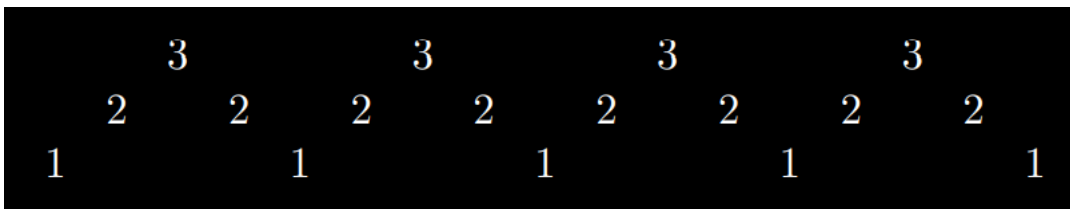


圖 2

由上圖可知鋸齒數列 $(3, 4)$ 包含 17 個正整數且其平均為 $\frac{33}{17}$ 。若鋸齒數列 (m, n) 的所有數字和為 145, 請找出所有可能之數對 (m, n) 。

A: $(m, n) = (2, 48), (3, 18), (5, 6), (7, 3)$

2. 設四次多項式 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$.

(1) 選取積分區間 $a \leq x \leq b$, 使得定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 達到最小值, 並求此最小值 .

(2) 設 $c > 0$, 求證 $\int_{-c}^c f(x)dx$ 恆為正值 .

解析：(1) 取 $0 \leq x \leq 3$ 時, $\int_0^3 f(x)dx = \frac{243}{5} - \frac{243}{2} + 99 - 27 = -\frac{9}{10}$ 最小 .

$$(2) \int_{-c}^c f(x)dx = \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{11}{3}x^3 - 3x^2 \right) \Big|_{-c}^c$$

$$= \frac{1}{5}[c^5 - (-c)^5] - \frac{3}{2}[c^4 - (-c)^4] + \frac{11}{3}[c^3 - (-c)^3] - 3[c^2 - (-c)^2] = \frac{2}{5}c^5 + \frac{22}{3}c^3 > 0 \text{ 恆成立}$$

高雄市111學年度
市立高級中等學校
聯合甄選