

國立嘉義高級中學 111 學年度第 1 次教師甄選 - 數學科試題

填充題：共 20 題，每題 5 分，合計 100 分

1. 觀察 2 的次方所形成的等比數列 $\langle 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots \rangle$ ，若 2^n 是 13 位數，則自然數 n 的所有可能值是_____
2. 計算 $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 39^2 - 40^2 + 41^2 =$ _____
3. $n \in \mathbb{Z}$ ， $n + 11$ 為 7 的倍數、 $n + 7$ 為 11 的倍數，則 n 之通解為_____
4. 朋友間往來書信，已知信在途中遺失的機率為 0.2 ，沒回信的機率為 0.4 ，今甲寄出一封信給乙，在已知甲沒收到回信的條件下，則乙有收到甲寄的信之機率為_____
5. 在坐標平面上，已知兩向量 $\vec{a} = (1, m)$ ， $\vec{b} = (n, 2)$ 在直線 $L: x + 2y + 3 = 0$ 上的正射影相同，則兩向量長度平方 $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ 的最小值為_____
6. 已知包含兩相交直線 $L_1: \frac{x-a}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-1}$ 與 $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-a}{-2}$ 的平面方程式為 $x + by + cz = d$ ，求實數數對 (a, b, c, d) 為_____
7. 設 $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，其中 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ，若 $\det(P) = -2$ 且 $P^{-1} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ ，則 $P =$ _____
8. 已知 ΔABC 的三邊長分別為 $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{6}$ 、 $\sqrt{7}$ ，今給定一線性變換 $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ，若 ΔABC 經 T 線性變換後成 $\Delta A'B'C'$ ，求 $\Delta A'B'C'$ 的面積為_____

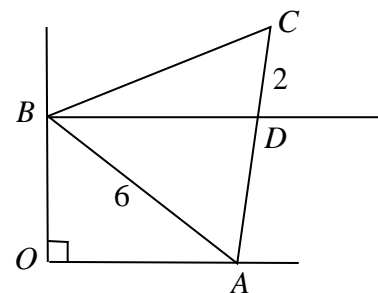
9. 坐標平面上， x 坐標與 y 坐標皆為整數的點稱為「格子點」。設 n 為正整數，已知在第一象限且滿足 $x + 2y \leq 4n$ 的格子點 (x, y) 的數目為 a_n 。則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$ 的值為_____。

10. 設二次曲線 $\Gamma: 9x^2 + 16y^2 - 18x - 64y - 71 = 0$ 與直線 $L: 2x - 5y - 10 = 0$ ，若要在 Γ 上找一點 P 使得 P 到 L 的距離最短，則 P 的坐標為_____。

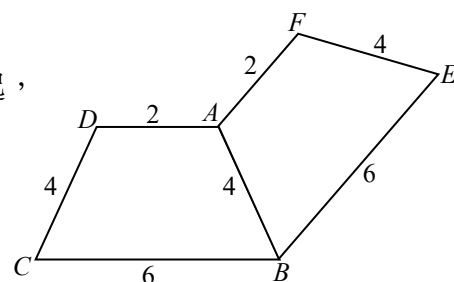
11. a, b, c, d, e, f, g 七個字母排成一列， a, b 不相鄰且 c, d, e 任二字母不相鄰，則其排列方法有_____種。

12. 設 $ABCD$ 為梯形，其中 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 且 $\overline{CD} = \overline{AD} = 2$ 、 $\angle C = 60^\circ$ ， P 為 \overline{CD} 上一點，直線 AP 與邊 \overline{BC} 之延長線相交於 Q 點，則 $\triangle ADP$ 與 $\triangle CQP$ 面積和之最小值為_____。

13. 如右圖，有一正 $\triangle ABC$ 的藝術品，邊長為 6 公尺，以 \overline{AB} 為邊斜靠在牆壁上，牆角為 O 點，形成一個直角 $\triangle OAB$ ， $\angle AOB = 90^\circ$ ， A 點在地面上， B 點在牆上，過 B 點作與地面平行之直線交 \overline{AC} 於點 D ，已知 $\overline{CD} = 2$ 公尺，試求此藝術品的最高點離地面_____公尺。



14. 如右圖為兩個全等的等腰梯形 $ABCD$ 及 $ABEF$ ，將等腰梯形 $ABEF$ 沿直線 AB 摺起，摺至平面 $ABEF$ 與平面 $ABCD$ 垂直，則此時的 \overline{DE} 長度為_____。



15. 空間直角坐標系中有一三角柱，其五個面所在之平面方程式分別為 $E_1: x + y + z = 2$ 、 $E_2: x + y + z = 11$ 、 $E_3: x - 2y + z = 3$ 、 $E_4: x - z = 5$ 、 $E_5: x - y = 2$ ，則此三角柱的體積為_____

16. 設函數 $f(x) = x^2 - x$ 的圖形為 Γ ，且 $Q(2,1)$ 為 Γ 外一點，已知過 Q 點有兩條直線與 Γ 相切，求 Γ 與這兩條直線所圍成的區域面積為_____

17. 對於二次曲線，下列敘述何者正確？(全對才給分)_____

(1)一動圓與直線 $L: x = -4$ 相切且與圓 $C: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ 外切，則此動圓圓心軌跡方程式為一拋物線

(2)一動圓過定點 $A(0, 4)$ 與圓 $C: x^2 + (y + 2)^2 = 4$ 相切，則此動圓圓心軌跡為一橢圓

(3)一動圓過定點 $A(0, 4)$ 與圓 $C: x^2 + y^2 = 25$ 相切，則此動圓圓心軌跡為一雙曲線

(4)若一雙曲線之一支恰與一拋物線共頂點且共焦點，則此雙曲線的正焦弦長，必大於此拋物線的正焦弦長

(5)與圓 $C_1: x^2 + (y - 2)^2 = 1$ 外切且與圓 $C_2: x^2 + y^2 = 49$ 內切之動圓 C 的圓心軌跡為一橢圓

18. 若數列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 滿足 $a_1 = 1$ 、 $a_2 = 2$ 且 $a_{n+2} \cdot a_n + 6a_{n+2} \cdot a_{n+1} = a_{n+1} \cdot a_n$ ，其中 $n \in \mathbb{N}$ ，則 $a_n =$ _____ (以 n 表示)

19. $x, y \in \mathbb{R}$ ，則 $\begin{cases} \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{y} \left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = \sqrt{2} \end{cases}$ 之解 (x, y) 為_____

20. 若 $0 < p < 1$ ，則 $\sum_{n=1}^{\infty} n^3(1-p)^{n-1}p =$ _____ (以 p 表示)

國立嘉義高級中學 111 學年度第 1 次教師甄選-數學科參考答案

填充題：共 20 題，每格 5 分，合計 100 分

(1) 40,41,42,43	(2) 861	(3) $77t - 18, t \in \mathbb{Z}$	(4) $\frac{52}{77}$
(5) $\frac{41}{5}$	(6) (3, -3, -1, -8)	(7) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	(8) $3\sqrt{26}$
(9) 4	(10) $\left(\frac{49}{17}, -\frac{11}{17}\right)$	(11) 1152	(12) $2\sqrt{6} - 2\sqrt{3}$
(13) $\frac{9\sqrt{21}}{7}$	(14) $\sqrt{34}$	(15) 12	(16) $\frac{2}{3}$
(17) (1)(4)(5)	(18) $\frac{2}{3^{n-1} + (-2)^{n-1}}, n \in \mathbb{N}$	(19) $\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2}, \frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right)$	(20) $\frac{p^2 - 6p + 6}{p^3}$