

國立彰化女子高級中學 111 學年度第二次教師甄選 數學科試題

考試時間：120 分鐘

一、填充題 (每題 5 分，共計 75 分)

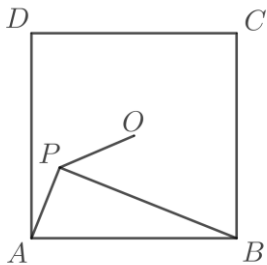
1. 某冰淇淋店最少需準備 n 桶不同口味的冰淇淋，才能滿足廣告所稱「任選兩球不同口味冰淇淋的組合數超過 500 種」。
試問來店顧客從 n 桶中任選兩球 (可為同一口味) 共有 _____ 種方法。
2. 彰化女中籃球校隊想招收隊員，某參加甄選的學生聲稱自身的投籃命中率 $p \geq 0.4$ ，校方想透過檢定的方式來決定她的聲稱是否採信。假設「此學生的投籃命中率 $p \geq 0.4$ 」且「投籃直到第一次進球共需 X 次」，在顯著水準為 0.05 的條件之下，求隨機變數 X 的拒絕域為 _____。($\log 2 \approx 0.3010$ 、 $\log 3 \approx 0.4771$)
3. 設正整數 x, y 滿足 $\sqrt{x} + \sqrt{2022} = \sqrt{xy + 2022}$ ，試求數對 $(x, y) =$ _____。(有兩組數對)
4. n 是不超過 1000 的正整數，且 $\frac{n+4}{n^2+7}$ 為最簡分數，問 n 有多少個可能值? _____。
5. 如圖所示， A 、 B 兩人面對面，中間有十個間隔，行進時 A 只能向右 1 或 2 格， B 只能向左 1 或 2 格。 A 、 B 兩人輪流行動， A 先動。若兩人停在同一格，這遊戲提前結束。問遊戲提前結束的方法有幾種? _____。

A											B
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---
6. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \frac{5}{3!+4!+5!} + \cdots + \frac{(n+2)}{n!+(n+1)!+(n+2)!} \right] =$ _____。
7. 已知 P 為 $\triangle ABC$ 內部的一點，滿足 $\angle PBA = 80^\circ$ ， $\angle PBC = 20^\circ$ ， $\angle PCB = 10^\circ$ ，且 $\angle PCA = 30^\circ$ ，則 $\angle PAC =$ _____。
8. 設 n 為正整數，拋物線 $y = 2^{2n+1}x^2 - 3 \cdot 2^n x + 1$ 與 x 軸交於 P_n 、 Q_n 兩點，與 y 軸交於 R_n ，設 a_n 為 $\triangle P_n Q_n R_n$ 的面積，
試求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n =$ _____。

9. 試求由 $y = \frac{2e^{\sqrt{x}}}{2x-1}$ 、 $y=0$ 、 $x=1$ 、 $x=4$ 所圍的區域，繞 $x=2$ 旋轉的體積為_____。

10. 空間中兩條歪斜線 L_1, L_2 ， P, Q 兩點在 L_1 上， R, S 兩點在 L_2 上，滿足 $\overline{PR} \perp \overline{PQ}$ 且 $\overline{QS} \perp \overline{PQ}$ ，已知 $\overline{PR} = 3$ ， $\overline{QS} = 5$ ， \overline{PR} 與 \overline{QS} 夾角為 $\frac{2\pi}{3}$ ，求兩條歪斜線 L_1, L_2 之距離_____。

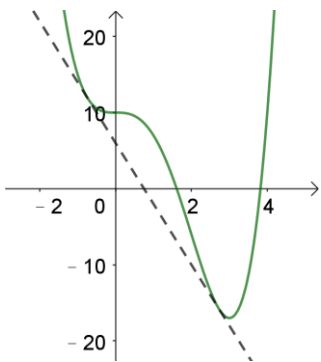
11. 如圖， O 為正方形 $ABCD$ 之中心， P 為內部一點，滿足 $\overline{PA} \perp \overline{PB}$ ， $\overline{PO} = 3$ ， $\overline{PA} = 2\sqrt{2}$ ，求 $\overline{PB} =$ _____。



12. 若函數 $y = f(x)$ 滿足 $f(1-\frac{1}{x}) + 2f(\frac{1}{1-x}) + 3f(x) = 12x$ ，其中實數 $x \neq 0, 1$ ，求 $f(2) =$ _____。

13. 若一橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 有兩焦點 F_1, F_2 ，已知 F_1, F_2 到橢圓任一切線之距離乘積為定值，並求出此定值_____。

14. 給定四次多項函數為 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ ，求與 $y = f(x)$ 恰有兩個相異切點的直線方程式（如下圖虛線所示）為_____。



15. 空間中有一個邊長為 6 的正四面體 $OABC$ ，平面 ABC 上一點 P 滿足 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$ 。若通過 P 點且相異於平面 ABC 的另一個平面分別與射線 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OC} 交於 A' 、 B' 、 C' ，求此平面與 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OC} 三射線圍出四面體 $OA'B'C'$ 中體積的最小值為_____。

二、計算證明題：(共計 25 分)

1. e 為自然常數：

(1) π^e 與 e^π 何者較大？ (2 分)

(2) 試證明之。 (6 分)

2. 已知平面上有 2022 個點 $P_1, P_2, \dots, P_{2022}$ 落於單位閉圓盤內(圓心 O)，且存在著正實數 $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$ 滿足

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2022}^2 = \frac{1}{2022} \text{ 以及 } a_1 \overline{OP_1} + a_2 \overline{OP_2} + \dots + a_{2022} \overline{OP_{2022}} \geq 1, \text{ 求 } a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}. \text{ (8 分)}$$

3. 已知 $\omega = \cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}$ ，求 $|2 - \omega|^2 + |2 - \omega^2|^2 + \dots + |2 - \omega^8|^2$ 。 (9 分)

國立彰化女子高級中學 111 學年度第二次教師甄選 數學科答案卷

一、填充題：(每題 5 分，共計 75 分)

1. 561	2. $x \geq 7$	3. (8088,2) 或(2022,3)	4. 957
5. 144	6. $\frac{1}{2}$	7. 20°	8. $\frac{1}{4}$
9. 送分	10. $\frac{15\sqrt{3}}{14}$	11. $5\sqrt{2}$	12. 13
13. $\begin{cases} b^2, & \text{當 } a > b > 0 \\ a^2, & \text{當 } b > a > 0 \end{cases}$	14. $y = -8x + 6$	15. $\frac{27\sqrt{2}}{2}$	/

二、計算證明題：(共計 25 分) (※請務必寫下計算或證明過程，否則不予計分)

1. (1) $e^\pi > \pi^e$ (2) 略

2. 1，證明略

3. 44，證明略