

臺中市立臺中第一高級中等學校 110 學年度第 1 次教師甄選 數學科 測驗題公告

壹、填充題第一部分(每題 5 分，合計 25 分)

1. 若滿足 $2^k \cdot 4^m \cdot 8^n = 512$ 之正整數 (k, m, n) 共有 a 組，滿足 $4^p \cdot 3^q \cdot 6^r = 2^{11} \cdot 6^{16}$ 之正整數 (p, q, r) 共有 b 組，則數對 $(a, b) =$ _____。
2. 設 x, y, z, u 均為實數，方陣 $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ 、 $C = \begin{bmatrix} 4 & -26 \\ -3 & 18 \end{bmatrix}$ ，已知 A 的反方陣乘以 B 等於 C ，則序對 $(x, y, z, u) =$ _____。
3. 已知 $x > 1$ 且滿足 $\log_4 x - \log_x 8 + 2 = 0$ ，則 $2(\log_2 x)^3 + 9(\log_2 x)^2 - 7(\log_2 x) - 3 =$ _____。
4. 有一體積為 $18\sqrt{3}$ 的四面體 $ABCD$ ，若 $\triangle ABC$ 為邊長 6 的正三角形，且 $\overline{CD} = \overline{BD}$ ，半平面 ABC 和半平面 DBC 的兩面角為 60° ，則 $\overline{AD} =$ _____。
5. 已知線段 \overline{PQ} 之長為 10，且線段 \overline{PQ} 上有一點 R 使 $\overline{PR} : \overline{RQ} = 3 : 2$ 。若 P 在 x 軸上移動， Q 在 y 軸上移動，動點 R 所形成的圖形為 Γ ，若點 $(2, 0)$ 與 Γ 上之點，距離的最大值為 M 、最小值為 m ，則數對 $(M, m) =$ _____。

貳、填充題第二部分(每題 7 分，合計 56 分)

6. 串生創造一個數列 $\langle a_n \rangle$ ，若 $a_1 = x$ 、 $a_2 = y$ (x, y 為正整數)，且對所有正整數 n 皆滿足 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 。已知創造出的數列 $\langle a_n \rangle$ 中有一項是 115，則 $x + y$ 的最小值為 _____。
7. 若 $f(x)$ 為滿足 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 36$ 、 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = -36$ 、 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 0$ 、 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x+2} = 0$ 之最低次多項式，則 $f(3) =$ _____。
8. 由樣本空間 S 得到兩個隨機變數 X, Y ，已知 $E(X) = 1$ 、 $E(X^2) = 3$ 、 $E(Y) = 2$ 、 $E(Y^2) = 5$ 、 $E(XY) = 3$ ，則 $\text{Var}(3X - 2Y + 7) =$ _____。
9. 已知四個實數 a, b, c, d ，滿足 $abcd = -5$ ， $a(b-1)(c-1)(d-1) = 11$ ， $a(b-2)(c-2)(d-2) = 33$ ， $a(b-3)(c-3)(d-3) = 73$ ，則 $a(b+1)(c+1)(d+1)$ 的值為 _____。
10. 已知三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (其中 $a, b, c, d \in R$ 且 $a \neq 0$)，若函數 $f(x)$ 的對稱中心為 $(1, 2)$ ，且局部看函數 $y = f(x)$ 的圖形在 $x = 2$ 附近近似於一條斜率為 -4 的直線，則 $\left| \frac{b^2 + c^2 + d^2}{a} \right|$ 的最小值為 _____。
11. 有 A, B, C 三個箱子，每箱內皆有六顆球，分別為兩個 1 號球、兩個 2 號球、兩個 3 號球。今甲、乙兩人均自每個箱子內各取一球，甲先取、乙後取，取後皆不放回，則兩人各取得三個球。若自 A, B, C 箱內取得球的號碼分別為百位數、十位數、個位數，則乙取得的三位數大於甲取得的三位數的機率為 _____。
12. 若 $x \in R$ ，滿足 $6^{x+1} - 3 \cdot 8^x + 2 \cdot 27^x - 36^x = 0$ ，則 $\frac{x}{2x-1} =$ _____。
13. 在長方形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 3$ 、 $\overline{BC} = 4$ ，今將此長方形沿對角線 \overline{AC} 折起。若折起後的半平面 ACD 與半平面 ABC 所夾的兩面角為 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)，則 \overline{BD} 的長度為 _____ (以 θ 表示)。

臺中市立臺中第一高級中等學校 110 學年度第 1 次教師甄選 數學科 試題

(官方數據版)

參、計算證明題(第一題 9 分，第二題 10 分，合計 19 分)

一、已知 A 、 B 兩點均在圓 $\Gamma: (x+1)^2 + (y-4)^2 = 50$ 上，其中 A 坐標為 $(-6, 9)$ ，若 \overrightarrow{AB} 在直線 $L: 3x+4y+32=0$ 的正射影長為 12，求 $|\overrightarrow{AB}|$ 的最大值。(9 分)

二、已知 $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 的四個根分為 $\alpha, \beta, \gamma, \phi$ ，將其標在複數平面上，分別得到 P, Q, R, S 四個點。試回答下列問題：

(1) 求 $\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\gamma} + \frac{1}{1-\phi}$ 之值。(5 分)

(2) 若複數平面上有一點 A ，其坐標為 $1+i$ ，求 $\overline{AP} \times \overline{AQ} \times \overline{AR} \times \overline{AS}$ 之值。(5 分)

臺中市立臺中第一高級中等學校 110 學年度第 1 次教師甄選 數學科 測驗題答案公告

壹、填充題第一部分 (每題 5 分，合計 25 分)

1.	2.	3.	4.	5.
(3,8)	$(-5,-7,2,3)$	$1+\sqrt{10}$	$\sqrt{39}$	$(\frac{6\sqrt{30}}{5},2)$

貳、填充題第二部分 (每題 7 分，合計 56 分)

6.	7.	8.	9.
7	400	10	-27
10.	11.	12.	13.
28	$\frac{62}{125}$	$\log_3 2$	$\frac{\sqrt{337-288\cos\theta}}{5}$

參、計算證明題 (第一題 9 分，第二題 10 分，合計 19 分)

一、已知 $A、B$ 兩點均在圓 $\Gamma : (x+1)^2 + (y-4)^2 = 50$ 上，其中 A 坐標為 $(-6,9)$ ，若 \overrightarrow{AB} 在直線 $L : 3x+4y+32=0$ 的正射影長為 12，求 $|\overrightarrow{AB}|$ 的最大值。(9 分)

答案：最大值 $= 6\sqrt{5}$

(計算過程 略)

二、已知 $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 的四個根分為 $\alpha, \beta, \gamma, \phi$ ，將其標在複數平面上，分別得到 P, Q, R, S 四個點。

試回答下列問題：

(1) 求 $\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\gamma} + \frac{1}{1-\phi}$ 之值。(5 分)

(2) 若複數平面上有一點 A ，其坐標為 $1+i$ ，求 $\overline{AP} \times \overline{AQ} \times \overline{AR} \times \overline{AS}$ 之值。(5 分)

答案：(1) 2

(2) $\sqrt{41}$

(計算過程 略)