新北市立高級中等學校 110 學年度教師聯合甄選

數學科　試題

考生作答說明：

一、請先檢視答案卷准考證號碼、姓名是否相符？如果不符，請立即向監試人員反映。

二、本試題計有：填充題 10 題，計算題 2 題。

三、題目如涉及計算，禁止使用電子計算功能設備運算。

四、答案卷請使用黑色或藍色原子筆作答。

五、答案卷與試題卷須一起繳交，始可離開試場。

新聞稿專用

新北市立高級中等學校 110 學年度教師聯合甄選
數學科　試題

一、填充題：60%，每題 6 分。

1. 在滿足 $11x^2-16xy+11y^2=1$ 的實數數對 (x, y) 中， x^2+y^2 的最大可能值為何？

2. 設 E 為坐標空間中通過 $(0, 0, 0)$、$(1, -1, 2)$、$(0, 3, 0)$ 三點的平面，且點 $(3, 4, -4)$ 與平面 E 距離最近的點為 P 點，則 P 點坐標為何？

3. 設 $f(x)$ 為不超過三次的實係數多項式函數，已知圖形 $y=f(x)$ 通過 $(0, -2)$ 與 $(3, 0)$ 兩點，且該圖形在這兩點的切線皆通過點 $(2, 0)$，則 $f(x)=$？

4. 在三角形 ABC 中，已知 $3\cos A+5\sin B=6$ ，$3\sin A+5\cos B=-1$ ，則 $\sin C=$？

5. 方程式 $\log_2 \log_4 x-\log_4 \log_2 x=\dfrac{1}{2}$ 的實數解 $x=$？

6. 從 1 到 9 的自然數中隨機取出三數，且隨機變數 X 表示這三數中最小的數字，則期望值 $E(X)=$ ？

7. 不等式 $|x+y|+|x+2y|+|2x+y|\le 8$ 在 xy-平面上所表示區域面積為？

8. 複數平面上以原點為中心的單位圓中，有一內接四邊形，其頂點為 z_1、z_2、z_3、z_4，且

$$S_n = z_1^n + z_2^n + z_3^n + z_4^n$$

若 $S_1=0$ 且 $S_2=1$，則此四邊形面積是多少？

9. 已知一正三角形內有一點 P，P 點到三頂點的距離分別為 3、4、5，則此正三角形面積為何？

10. 用 1 、 2 、 3 、4 這四數字排成長度為 5 的字串，其中 1 出現偶數次的字串有多少個？(例如 : 22311 就是其中一個，22334 也是)

二、計算題：40%，每小題 10 分。

1.坐標平面上有一條拋物線$\Gamma: y^2 = x+4$，在Γ上取三點$A(0, 2)$、B、C，使得直線AB與直線BC垂直，試求C點的y坐標範圍。 (10 分)

2.已知$xyz \neq 0$ ， a、 b 、c 不全為零，且滿足下列方程組

$$\begin{cases} a=\dfrac{by}{z}+\dfrac{cz}{y} \\ b=\dfrac{cz}{x}+\dfrac{ax}{z} \\ c=\dfrac{ax}{y}+\dfrac{by}{x} \end{cases}$$

證明:

(a) $a^3x^3 + b^3y^3 + c^3z^3 + abcxyz = 0$ (10 分)

(b) $\dfrac{zy}{x^2} + \dfrac{xz}{y^2} + \dfrac{xy}{z^2} = -1$ (10 分)

(c) $a^3 + b^3 + c^3 - 5abc = 0$ (10 分)

新聞稿專用

新北市立高級中等學校 110 學年度教師聯合甄選
數學科 答案(閱卷版)

一、填充題：60%，每題 6 分

1. $\frac{1}{3}$

2. (-1,4,-2)

3. $f(x)=-\frac{1}{27}x^3+x-2$ (或 $(x-3)^2(-\frac{x}{27}-\frac{2}{9})$)

4. $\frac{1}{10}$

5. 256

6. $\frac{5}{2}$

7. 28

8. $\frac{\sqrt{15}}{2}$

9. $9+\frac{25}{4}\sqrt{3}$ (或 $\frac{36+25\sqrt{3}}{4}$)

10. 528

二、計算題：40%，每題 10 分

1. 解：令 B,C 坐標分別為 $B(a^2-4,a),C(y^2-4,y)$。由 $AB\perp BC$ 可列式得 $y-a=-(a+2)\left(y^2-4-(a^2-4)\right)$。因為 $y\neq a$，上式整理並消除因式 $y-a$ 後可得 $a^2+(2+y)a+(2y+1)=0$。這個 a 的二次方程式有實根，故其判別式大於或等於 0，解得 $y\leq 0$ 或 $y\geq 4$。最後檢驗兩端點 $y=0,4$ 確實為解，故所求範圍為 $y\leq 0$ 或 $y\geq 4$。

2.(a)

$$\begin{cases} \boldsymbol{a=\frac{by}{z}+\frac{cz}{y}} \\ \boldsymbol{b=\frac{cz}{x}+\frac{ax}{z}} \\ \boldsymbol{c=\frac{ax}{y}+\frac{by}{x}} \end{cases}$$

等價於

$$\begin{cases}(-ax)\dfrac{1}{x}+(cz)\dfrac{1}{y}+(by)\dfrac{1}{z}=0\\(cz)\dfrac{1}{x}+(-by)\dfrac{1}{y}+(ax)\dfrac{1}{z}=0\\(by)\dfrac{1}{x}+(ax)\dfrac{1}{y}+(-cz)\dfrac{1}{z}=0\end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases}(-ax)r+(cz)s+(by)t=0\\(cz)r+(-by)s+(ax)t=0\\(by)r+(ax)s+(-cz)t=0\end{cases}$$

有非零解

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix}-ax & cz & by\\ cz & -by & ax\\ by & ax & -cz\end{vmatrix}=0$$

行列式展開得

$$a^3x^3+b^3y^3+c^3z^3+\mathrm{abcxyz}=0$$

(b)

$$\begin{cases}a=\dfrac{by}{z}+\dfrac{cz}{y}\\b=\dfrac{cz}{x}+\dfrac{ax}{z}\\c=\dfrac{ax}{y}+\dfrac{by}{x}\end{cases}$$

等價於

$$\begin{cases}(-1)a+\left(\dfrac{y}{z}\right)b+\left(\dfrac{z}{y}\right)c=0\\\left(\dfrac{x}{z}\right)a+(-1)b+\left(\dfrac{x}{z}\right)c=0\\\left(\dfrac{x}{y}\right)a+\left(\dfrac{y}{x}\right)b+(-1)c=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -1 & \frac{y}{z} & \frac{z}{y} \\ \frac{x}{z} & -1 & \frac{x}{z} \\ \frac{x}{y} & \frac{y}{x} & -1 \end{vmatrix} = 0$$

行列式展開得

$$\frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = -1$$

(c)

$$a^3 = \left(\frac{by}{z}\right)^3 + \left(\frac{cz}{y}\right)^3 + 3\left(\frac{by}{z} + \frac{cz}{y}\right)\left(\frac{by}{z}\right)\left(\frac{cz}{y}\right)$$

$$= \left(\frac{by}{z}\right)^3 + \left(\frac{cz}{y}\right)^3 + 3abc \qquad (1)$$

同理

$$b^3 = \left(\frac{cz}{x}\right)^3 + \left(\frac{ax}{z}\right)^3 + 3abc \qquad (2)$$

$$c^3 = \left(\frac{ax}{y}\right)^3 + \left(\frac{by}{x}\right)^3 + 3abc \qquad (3)$$

(1), (2), (3) 兩端相加得

$$2(a^3 + b^3 + c^3) = (a^3x^3 + b^3y^3 + c^3z^3)\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}\right) + 9abc$$

$$= -abcxyz\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3}\right) + 9abc$$

$$= abc\left(9 - \left(\frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2}\right)\right)$$

$$= 10abc$$

故 $a^3 + b^3 + c^3 - 5abc = 0$