

國立新竹科學園區實驗高級中等學校 110 學年度 第一次教師甄選 試題卷

甄選科別：高中數學科教師

考試科目：數學科專業知識與教材教法

*說明：本試題分為：填充題，8 題，佔 40 分；計算與證明題，7 題，佔 60 分；共計 100 分。

*以下為試題：

一、填充題：8 題，每題 5 分，共計 40 分；只需寫出答案即可，全對才給分。

1、已知一單位圓圓 O，且 $\triangle ABC$ 為圓 O 之內接正三角形。若 P 為圓 O 上一動點，則 $\overline{PA} \times \overline{PB} \times \overline{PC}$ 的最大值為何？

2、已知集合 $S = \{1, 2, 3, \dots, 2021\}$ ，試求：S 的子集中，元素和是奇數的集合有多少個？

3、已知 $\{a_n\}$ 為一等比數列，前 n 項和為 S_n ($n \in N$)，且滿足 $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{2}{a_3}$ 與 $S_6 = 63$ 。

若 b_n 是 $\log_2(a_n)$ 與 $\log_2(a_{n+1})$ 的等差中項，試求數列 $\{(-1)^n b_n^2\}$ 的前 $2n$ 項和為何？

4、已知一連續函數 $f(x)$ ，若 $\int_x^{x+1} f(t)dt = x^3, \forall x \in \mathbb{R}$ ，求 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5、如果 n 是一個正整數，當 n 是偶數時，定義 $n!! = n \times (n-2) \times (n-4) \times \cdots \times 2$ ；
當 n 是奇數時，定義 $n!! = n \times (n-2) \times (n-4) \times \cdots \times 1$ 。比如說， $8!! = 8 \times 6 \times 4 \times 2 = 384$ ， $9!! = 9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1 = 945$ 。求所有使得 $n!!$ 整除 $2022!!$ 的正整數 n 的個數。

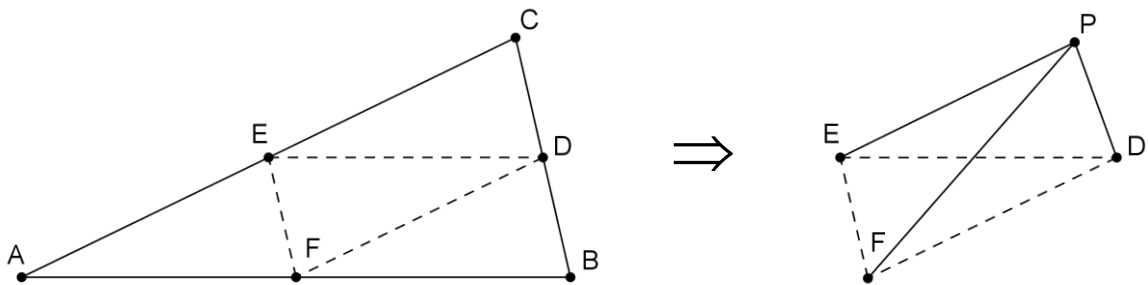
6、如果一個 $2 \times 2 \times 2$ 的立方體的一面被染了色(其他面都沒有染色)，然後將立方體切成8個 $1 \times 1 \times 1$ 個小立方體，將這8個小立方體隨機的組成一個 $2 \times 2 \times 2$ 的立方體。
求新的立方體的6個面都沒有任何顏色的機率？

7、已知數列 $\{a_n\}$ 為一正數數列，其前 n 項總和 S_n 滿足： $(S_n)^2 = \sum_{k=1}^n (a_k)^3$ ，試求：

數列 $\{a_n\}$ 的前 109 項之總和 S_{109} 為何？

8、已知一個等腰三角形 ABC ，其中 $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$ ， $\overline{BC} = 2\sqrt{5}$ ，今依序在 \overline{BC} 、 \overline{AC} 、 \overline{AB}

上取各邊中點 D 、 E 、 F ，分別將 $\triangle AEF$ 、 $\triangle BDF$ 、 $\triangle CDE$ 沿著 \overline{EF} 、 \overline{DF} 、 \overline{DE} 折起來，使 A 、 B 、 C 三點重合在 P 點形成一個四面體 $P-DEF$ (如下示意圖)，則此四面體 $P-DEF$ 的體積為_____。



二、計算與證明題：7題，共計60分。每題配分標示於題後。必須寫出過程才給分，採部份給分方式，請儘量作答。

A、設平面 E 通過 $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ ，且與平面 $x+2y-z+3=0$ 的夾角為 θ ，
若 $|\cos\theta| = \frac{1}{6}$ ，求 E 的方程式。(8分)

B、設 $F_1(-5,0)$, $F_2(5,0)$ 為 $\Gamma: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的兩焦點，若 \overline{AB} 為過 F_2 的任一焦弦，
求 $\triangle ABF_1$ 面積的最小值，並證明之。(8分)

C、在複數平面上，點 $0, z, \frac{1}{z}, z + \frac{1}{z}$ 形成的平行四邊形面積為 $\frac{35}{37}$ 。 z 的實部是正數。
如果 d 為 $\left|z + \frac{1}{z}\right|$ 能取到的最小值，計算 d^2 的值。(8分)

D、已知 $\triangle ABC$ 的面積是 $\frac{1}{4}$ ，其外接圓半徑為 1，且 a, b, c 為 $\triangle ABC$ 的三邊長，試證：

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \quad (8分)$$

E、小胖很喜歡下棋，常常纏着爸爸媽媽跟他對奕。有一天，爸爸對他說：「小胖，我們來一次棋賽吧。媽媽和我是一隊，你自己是另一隊。媽媽和我輪流跟你對奕三局，即媽媽下一、三局，爸爸下第二局或者是爸爸下一、三局，媽媽下第二局，但我們不用三戰兩勝的規則，你要在三局中連贏兩局才算勝利。你想跟我先下還是跟媽媽先下第一局呢？」小胖心裏盤算：「爸爸棋術比媽媽高一點，要勝他比較難。不如和媽媽下第一局，便只用和爸爸碰一次。如果和爸爸下第一局，豈不是要和他碰兩次嗎？好，就這樣決定。」於是他答道：「我和媽媽下第一局。」你認為小胖的選擇是明智之舉嗎？（8分）

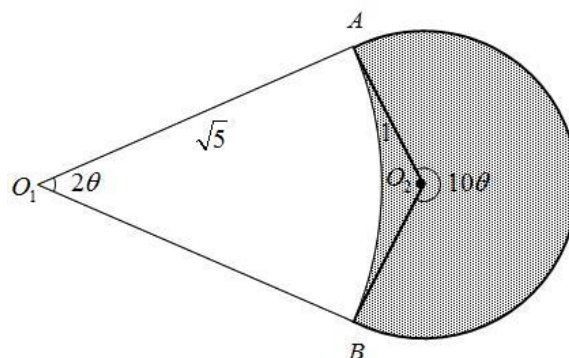
F、在空間中有三條直線： $L_1: \begin{cases} x=t \\ y=0, t \in \mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}$ ， $L_2: \begin{cases} x=k \\ y=\sqrt{3}k, k \in \mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}$ ， $L_3: \begin{cases} x=s \\ y=-\sqrt{3}s, s \in \mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}$ ，

以及三顆半徑為 1 的球，其球心分別為 P 、 Q 、 R ，今使 P 在 L_1 上移動， Q 在 L_2 上移動， R 在 L_3 上移動，試問三顆球所經區域，其交集部分的體積為_____。（10分）

G、下圖的灰色區域，是以 O_1 為圓心， A 和 B 為端點的扇形 O_1AB （圓心角為 2θ ）和以 O_2

為圓心， A 和 B 為端點的扇形 O_2AB （圓心角為 10θ ）所圍出的新月形。

若 $\overline{O_1A} = \sqrt{5}$ ， $\overline{O_2A} = 1$ ，則求 $\sin \theta$ 的值。（10分）



國立新竹科學園區實驗高級中等學校 110 學年度 第一次教師甄選 答案卷

甄選科別:高中數學科教師

考試科目:數學科專業知識與教材教法

一、填充題: 8 題, 每題 5 分, 共計 40 分; 只需寫出答案即可, 全對才給分。

1	2	2	2^{2020}	3	$2n^2$	4	$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$
5	1517	6	$\frac{1}{16}$	7	5995	8	$\frac{5\sqrt{10}}{4}$