國立彰化女子高級中學 110 學年度第一次教師甄選 數學科試題

一、填充題：(每格 5 分，共 75 分，答案請寫在答案卷上)

1.已知 n 為正整數，且 n^3 的末二位數為 44，若將滿足上述條件的 n 值由小到大排列得數無窮數列 a_1、a_2、a_3、…，求 a_{10}=____________。

2.空間中有四個點 O、A、B、C，其中三向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 兩兩夾角皆為 45°，已知 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\sqrt{2}$、$\left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{3}$、$\left|\overrightarrow{OC}\right|=\sqrt{6}$，求 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 張出的四面體體積為____________。

3.有甲、乙兩箱，甲箱內有一白球、一黑球，乙箱內有一白球。每次先從甲箱任取一球放入乙箱內，再由乙箱任取一球放回甲箱裡，這樣的操作稱做一局。第 n 局結束時，求甲箱內有一白一黑的機率為____________。(以 n 表示)

4.設 $x^3+2x^2+3x+4=0$ 之三根為 a、b、c，求行列式 $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$ 之值為____________。

5.平面上區域 D 的定義如下：$\mathrm{D}=\{(\mathrm{x},\mathrm{y})\in R^2 \mid\ 2|x|+|y|\le 20$ 且 $x^2+4y^2\ge 20\}$。在區域 D 內格子點個數(即 x、y 座標皆為整數)的個數為____________。

6.大富翁遊戲中，每個回合都會擲一個六面骰決定前進步數，設此六面骰的六個面分別為 1, 2, 3, 4, 5, 6 點，而現在你的所在位置距離「機會與命運」格還有 10 步，若你要走到「機會與命運」格，請問有____________種不同的走法？
（例如：先前進 4 步，再前進 6 步，即為一種走法；或先前進 1 步，再前進 6 步，再前進 3 步，即為另一種走法。）

7.空間中一直線 L：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$ 及兩點 $A(3,4,1)$，$B(1,3,-1)$，若 P 為直線 L 上一點，且 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值時 P 點坐標為____________。

8.已知實數 $a>1$，正方形 $ABCD$ 的面積為 36，其中 $\overline{AB}$ 與 x 軸平行，且 A、B、C 分別為函數 $y=\log_a x$，$y=2\log_a x$，$y=3\log_a x$ 圖形上的點，試求 $a=$____________。

9.已知圓 $x^2+y^2=37$ 內部一點 $P(1,2)$，若 P 點為某弦的一個三等分點，則此弦所在的直線方程式為____________。

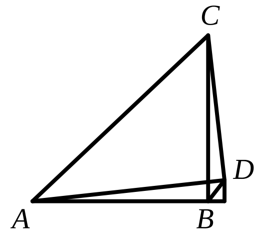
10. x 為實數，當 $\sqrt{x^2-8x+41}+\sqrt{x^2-2x+5}$ 有最小值時，x 的值為=____________。

11.設三次函數$f(x)=x^3-(2a+1)x^2+bx-c$，且 a、b、c 均為整數，若$f(x)=0$有虛根，且$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^3-1}=\dfrac{1}{3}$，

則$f(0)$的值為____________。

12.如下圖所示，在 xy 平面上$\overline{AC}=\overline{AD}$，$\angle ABC=90°$，$\angle CAD=\alpha$，$\angle CBD=\beta$，$\angle CAB=\gamma$，若$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{5}{13}$，

則 $\tan\gamma=$ _____________。



13.空間座標系中，已知圓錐面 $z^2=x^2+y^2$ 與平面$x+z=6$相交的曲線為一拋物線，求此拋物線的焦距為_______。

14.已知兩複數 z 與 $z+i$ 皆為方程式 $x^n=1$ 的複數根，求滿足此條件的最小正整數 n 為_____________。

15.若 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2}{n}[\sqrt{\dfrac{2x^2}{n}-1}+\sqrt{\dfrac{4x^2}{n}-1}+\cdots+\sqrt{\dfrac{2n\cdot x^2}{n}-1}]$，則 $f'(5)=$ _____________。

二、說明題、計算證明題：(共 25 分，答案請寫在答案卷上)

1.請根據 108 課綱的數學課程安排，分別使用10 年級、11 年級、12 年級和大學微積分介紹的數學方法解此題目：
「x、y 為實數，已知$3x+4y=5$，求$(x-1)^2+(y+2)^2$的最小值與此時的(x,y)值。」
(請標註該方法為哪一年級，每個方法 2 分，共 8 分)

2.「**悖論** (Paradox)」是指一種導致矛盾的命題，通常從邏輯上無法判斷正確或錯誤。請舉出二個與高中數學課程相關的悖論例子，並說明該悖論的產生矛盾的觀念各為何。(每個悖論 4 分)

3.有 A,B,C,D,E 共五台電腦，想利用丟銅板的方式決定任兩台電腦間是否要連線，如果出現正面則連線，如果出現反面則不連線，每個傳送到其中一台電腦的訊息將會同時傳到其他與這台電腦有連線的電腦。求每一台電腦都能從其他所有電腦收到訊息的機率為____________(共 9 分)

國立彰化女子高級中學 110 學年度第一次教師甄選 數學科答案卷

一、填充題：(每格 5 分，共 75 分)

1.	2.	3.
4.	5.	6.
7.	8.	9.
10.	11.	12.
13.	14.	15.

二、說明題、計算證明題：(共 25 分)(※請務必寫下計算或證明過程，否則不予計分)

1.(8 分)

2. (8 分)

3. (9 分)

國立彰化女子高級中學 110 學年度第一次教師甄選 數學科答案卷

一、填充題：(每格 5 分，共 75 分)

1. 464	2. $\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}$	3. $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{4})^n$
4. -8	5. 392	6. 492
7. $(\frac{1}{3},\frac{8}{3},\frac{1}{3})$	8. $\sqrt[6]{3}$	9. $3x-4y+5=0$ 或 $x=1$
10. $\frac{13}{7}$	11. -2	12. $\frac{31}{33}$
13. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$	14. 12	15. 送分

二、說明題、計算證明題：(共 25 分)(※請務必寫下計算或證明過程，否則不予計分)

1.(8 分)

最小值 4，此時$(x,y)=(\frac{11}{5},-\frac{2}{5})$

2. (8 分)
略

3. (9 分)

假設任兩台完全連線，則需連接 10 條線，欲符合條件至少要四條線

1. 10 條線全部接上情形只有一種

1. 若任意拆掉任一條線，二條線，三條線，皆可符合條件

共 10+10*9/2+10*9*8/(3*2*1)=175

2. 若任意拆掉四條線，需扣除其中四條線皆連至同一電腦的情形

10*9*8*7/(4*3*2*1)-5=205

3. 若任意拆掉五條線，需扣除其中四條線皆連至同一電腦的情形

10*9*8*7*6/(5*4*3*2*1)-5*6=222

4. 若任意拆掉六條線，需扣除(1)其中四條線皆連至同一電腦的情形(2)任選相鄰兩台電腦維持連線，但各拆掉另外三條線

10*9*8*7/(4*3*2*1)-5*(6*5/2)-(5*4/2)=125

因此共有 1+175+205+222+125=728，每一種情形依丟銅板的方式決定，機率為 1/2^10

故欲接通五台電腦的機率為 728/1024 $= \frac{91}{128}$