基本觀念

在進行數學獵人試驗之前，就由我尼特羅來為各位考生說明試驗所需知道的事項吧！

- Topic：
  0. 預備知識
  1. 直線方程式
  2. 線性規劃

零. 預備知識

● 斜率(m)：

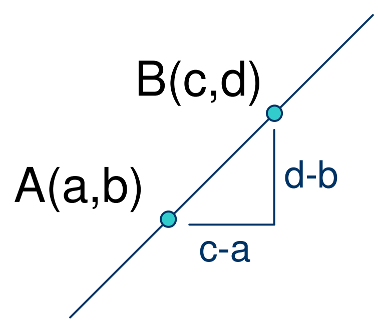
1. m＝鉛直位移/水平位移＝△y/ △x

2. 設A(a, b)、B(c, d)，則直線AB之斜率＝(d－b)/(c－a)

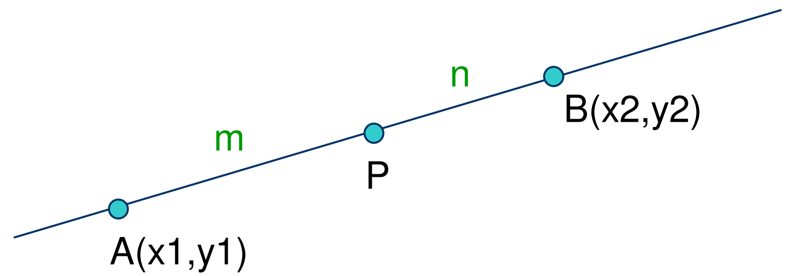
● Ex：設C(5, 9)、D(8, 3)，則直線CD之斜率為何？

Sol：m＝(9－3)/(5－8)＝－2

※注意！當直線AB為<u>鉛直線</u>時直線AB之斜率不存在。



零. 預備知識-cont.



●分點公式：

1. P點在線段AB上且(AP長)：(BP長)＝m：n，若 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，則P點坐標＝

$\{(mx_2+nx_1)/(m+n), (my_2+ny_1)/(m+n)\}$

●Ex：P點在線段AB上且(AP長)：(BP長)＝3：2，若 A(3, 8)、B(4, 9)，則P點坐標為何？

Sol：P＝{(3×4＋2×3)/(2+3),(3×9＋2×8)/(2+3)}
＝(18/5,43/5)

※特別地，若(AP長)：(BP長)＝1：1(即P點為線段AB的中點)，則P點坐標可簡化為 $\{(x_1+x_2)/2, (y_1+y_2)/2\}$ 。

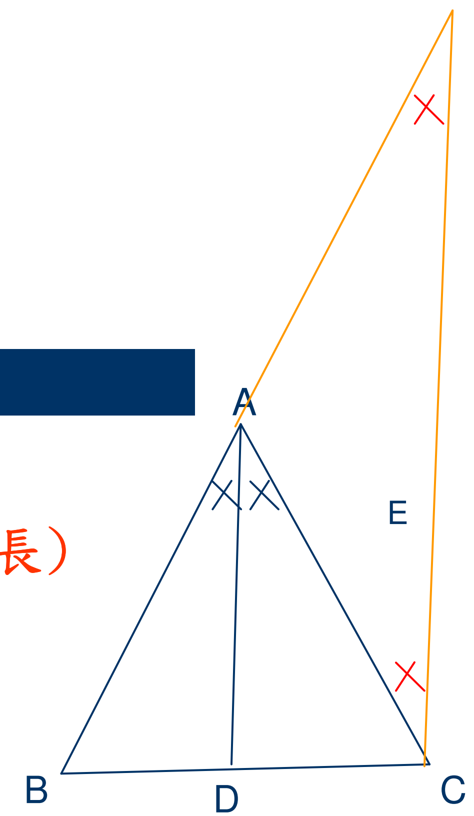
零. 預備知識-cont.

●內角平分線定理：

(線段AB長)：(線段AC長)＝(線段BD長)：(線段CD長)

●證明：

1. 延長線段BA，並作過C點與線段DA平行之直線。
   設兩線相交於E點。
2. 因為線段DA平行於線段CE→∠BAD＝∠AEC＝∠ACE
   →線段AC長＝**線段AE長**
3. 因為線段DA平行於線段CE
   →(線段AB長)：(**線段AE長**)＝(線段BD長)：(線段CD長)
   又由2. 知：線段AC長＝線段AE長
   →(線段AB長)：(線段AC長)＝(線段BD長)：(線段CD長)



一. 直線方程式的表現式

●何謂直線方程式？

1. 二元一次方程式：$ax+by=c$，其中a、$b\neq 0$。
2. 因為二元一次方程式的圖形為一直線，所以二元一次方程式亦稱為直線方程式。

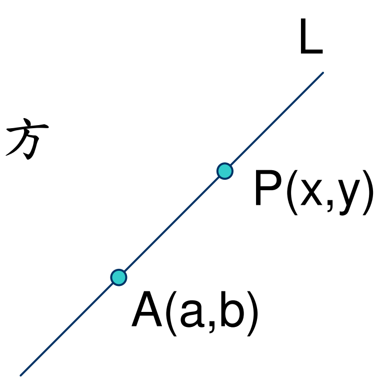
●標準式：

1. $ax+by=c$，其中a、b不全為0。斜率為$-a/b$。
2. Ex：$3x+5y=9$、$y=1$

●點斜式：

1. 若已知直線L通過一點A(a, b)且斜率為m，則此直線方程式為$(y-b)=m(x-a)$。

重要！



例題

●Ex1：設L過點(4,5)且斜率為6，則L的方程式為何？

Sol：利用點斜式可知方程式為 $(y-5)=6(x-4)$

移項整理後可得 $6x-y=19$

●Ex2：設L的斜率為m及y軸的截距為b，則L的方程式為何？

Sol：由y軸的截距為b可知此直線通過點(0,b)

利用點斜式可知方程式為 $(y-b)=m(x-0)$

移項整理後可得 $\mathbf{y=mx+b}$

※常用：當題目給你一條直線方程式，你能將它整理成 $y=mx+b$ 的型式時，則其中<u>x的係數m即為此直線方程式的斜率</u>、<u>(0,b)即為和y軸的交點</u>！

例題-cont.

- Ex3：設L通過A(a, b)及B(c, d)兩點，則L的方程式為何？

  Sol：因為L過AB兩點，所以此直線之斜率為(b－d)/(a－c)

  利用點斜式可知方程式為**(y－b)＝{(b－d)/(a－c)}(x－a)**

  點斜式之應用二：兩點式

- Ex4：設L過x、y軸的截距分別為a、b且ab≠0，則L的方程式？

  Sol：由x、y軸的截距分別為a、b可知L過點(a, 0)及(0, b)

  所以此直線斜率為－b/a

  利用點斜式可知方程式為y－0＝(－b/a)(x－a)

  移項整理後可得**(x/a)＋(y/b)＝1**

  點斜式之應用三：斜截式

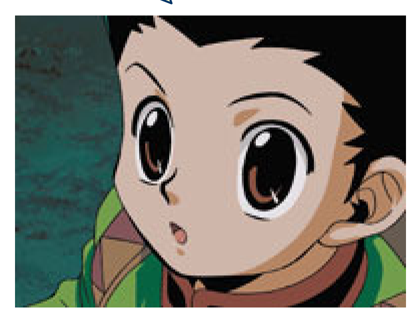
二. 兩線關係之意涵

●幾何—在坐標平面上，兩直線L_1(斜率m_1)及L_2(斜率m_2)有以下三種關係：

1. 相交於一點
   - 互相垂直：
     1. 記為$L_1 \perp L_2$
     2. 若$L_1 \perp L_2$，則$m_1 m_2 = -1$
   - 不互相垂直
2. 互相平行：
   1. 記為$L_1 // L_2$
   2. 若$L_1 // L_2$，則$m_1 = m_2$
3. 重合：$L_1 = L_2 \rightarrow m_1 = m_2$

※注意！此等式有一特例不滿足：當兩直線分別為<u>鉛直線</u>(斜率不存在)和<u>水平線</u>(斜率＝0)時。

喔~原來如此！



例題

● Ex1：設L_1：$3x+4y=-2$及L_2：$4x-3y=5$。
則L_1及L_2的關係為何？

Sol：L_1的斜率$=-3/4$；L_2的斜率$=4/3$又$(-3/4)(4/3)=-1$

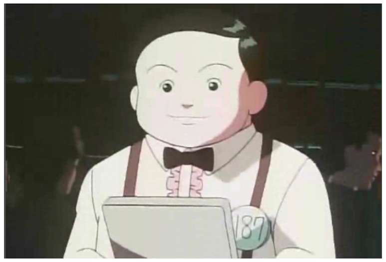
所以L_1垂直於L_2 $(L_1 \perp L_2)$。

● Ex2：設L_1：$x+y=8$及L_2：$x+y=9$。則L_1及L_2的關係為何？

Sol：L_1的斜率$=-1$；L_2的斜率$=-1$又$-1=-1$

所以L_1平行於L_2 $(L_1 // L_2)$。

來點有挑戰性的題目吧！



二. 兩線關係之意涵-cont.

- 代數—由於直線方程式L_1及L_2均為二元一次式，因此兩直線的關係可等同於探討聯立方程組的解。
- 聯立方程組的解有以下三種情形：

$$\begin{cases} L_1: a_1x+b_1y=c_1 \\ L_2: a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

恰有一組解	L_1與L_2交於一點	$a_1/b_1 \neq a_2/b_2$	L_1與L_2斜率不相等
無解	$L_1 // L_2$	$a_1/b_1 = a_2/b_2 \neq c_1/c_2$	L_1與L_2斜率相等
無限多解	L_1與L_2重合	$a_1/b_1 = a_2/b_2 = c_1/c$	

例題

- **Ex1：設 $\begin{cases} L_1: 3x+4y=4 \\ L_2: 4x-3y=3 \end{cases}$。試判斷$L_1$及$L_2$的關係？**

  Sol(1)：因為$3/4 \neq -4/3 \neq 4/3$，所以L_1與L_2交於一點。

  Sol(2)：解聯立可得$x=24/25$、$y=7/25$(一組解)，所以L_1與L_2交於一點。

- **Ex2：設 $\begin{cases} L_1: x+y=8 \\ L_2: x+y=9 \end{cases}$。試判斷$L_1$及$L_2$的關係？**

  Sol(1)：因為$1/1=1/1 \neq 8/9$，所以L_1與L_2平行。

  Sol(2)：解聯立可得$0=1$(無解)，所以L_1與L_2平行。

三.兩線關係物理方面之應用

●求△ABC的內、外、重、垂四心：

1.內心I：為三角形三內角平分線的交點。

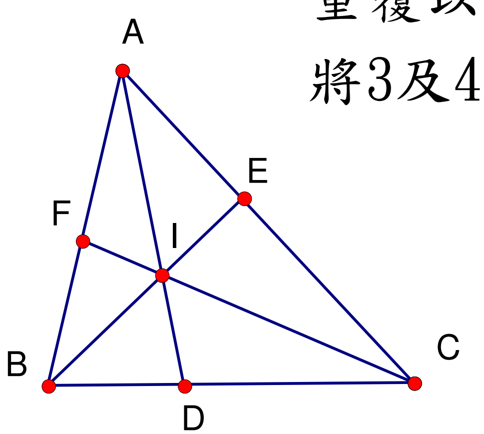
求法：利用內角平分線定理-求出(線段BD)：(線段DC)的比

利用分點公式-求出D點坐標

利用點斜式-求出直線AD的直線方程式--3

重覆以上步驟可再求得直線BE或CF的直線方程式--4

將3及4式解聯立即得所求！



三. 兩線關係物理方面之應用-cont.

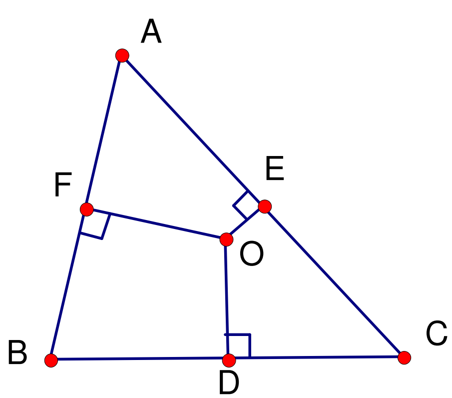
2. 外心O：為三角形三邊之垂直平分線的交點。

求法：利用分點公式-求出D點坐標(線段BC之中點)

利用點斜式-求出過D點且垂直BC直線的直線方程式OD--3

重覆以上步驟可再求得直線OF或OE的直線方程式--4

將3及4式解聯立即得所求！



也就是說，他考了35次數學獵人試驗都還沒過…

三.兩線關係物理方面之應用-cont.

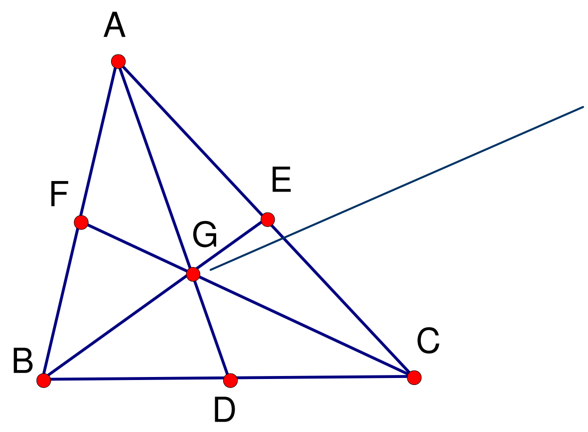
3.重心G：為三角形三中線的交點。

求法：利用分點公式-求出D點坐標(線段BC之中點)

利用點斜式-求出線段AD的直線方程式--3

重覆以上步驟可再求得線段BE或CF的直線方程式--4

將3及4式解聯立即得所求！



※補充：若A、B、C點之坐標分別為(x1, y1)、(x2, y2)、(x3, y3)，則重心G點公式＝{(x1＋x2＋x3)/3, (y1＋y2＋y3)/3}

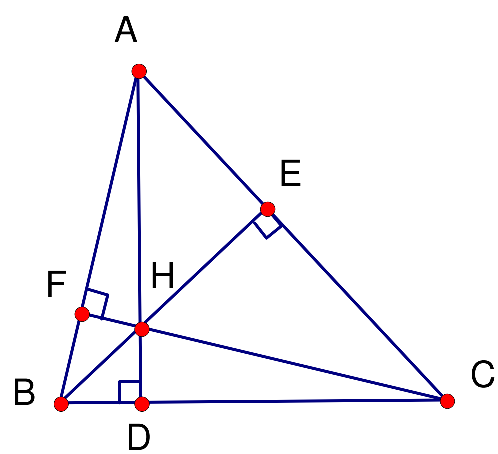
三. 兩線關係物理方面之應用-cont.

4. 垂心H：為三角形三邊高的交點。

求法：利用點斜式-求出過A且垂直線段BC的直線方程式--3

重覆以上步驟可再求得線段BE或CF的直線方程式--4

將3及4式解聯立即得所求！



※有些參考書或講義有公式可求出坐標，
但數學並不單只是背公式而已。而是要
了解它的原理是什麼，只要能理解就算
公式忘了也能解題！

三. 兩線關係物理方面之應用-cont.

● 反射：

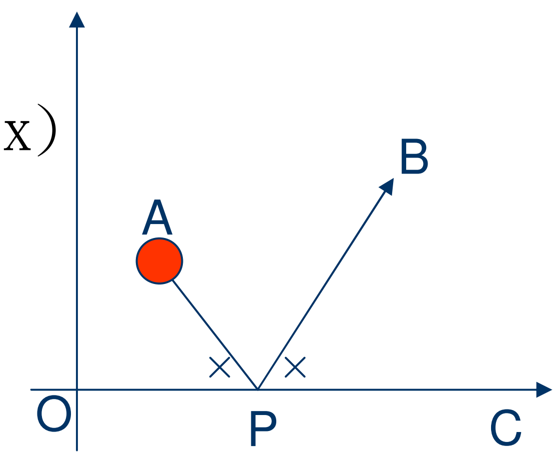
1. 目標：利用**入射角＝反射角**解題。

2. Ex：設有一球從A(2, 3)丟出，撞上地面後反彈至B(10, 5)。試求球撞擊地面時的坐標(即求P點坐標)。

Sol：因為入射角＝反射角，所以可知

線段AP斜率＝－線段BP斜率

設P(x, 0)，則3/(x－2)＝5/(10－x)



Ans：(5, 0)

三. 兩線關係物理方面之應用-cont.

●鏡射：

1. 目標：求出**對稱點**之坐標。

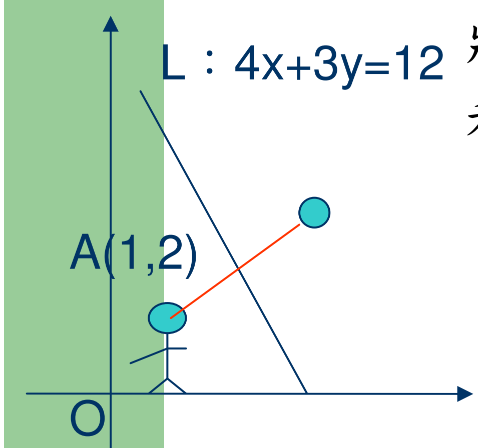
2. Ex：有一人站於一面傾斜的鏡子前。試求出鏡子中自己頭的坐標。

Sol：設所求坐標為B(a, b)

利用點斜式-求出過A且垂直L的直線方程式M

將L及M解聯立可得兩線之交點C

利用分點公式-求出B點坐標(線段AC之中點)



Ans：(41/25, 62/25)

四. 線性規劃

●名詞解釋：

1. 當一問題和兩個變量x、y有關，且這兩個變數受到題目條件的限制，因而產生一組二元一次不等式，此時這一組不等式的解在xy平面上所形成的多邊形區域稱為此問題的可行解區域。

2. 在可行解區域上求出函數$P(x, y)=ax+by+c$的極值。此時這函數$P(x, y)$稱為此問題的目標函數。

3. 在可行解區域上求出目標函數的極值之過程稱為線性規劃。

窟魯塔族的學校沒教過這個，我趕快學一下~

四. 線性規劃-cont.

●線性規劃會碰到到的問題：

(1)如何繪出二元一次不等式的可行解區域？

(2)極值如何求出？

○Sol(1)：**Ex：$3x+2y+6>0$的圖形作法：**

1. 先描出直線$3x+2y+6=0$的圖形。

2. 想想看：

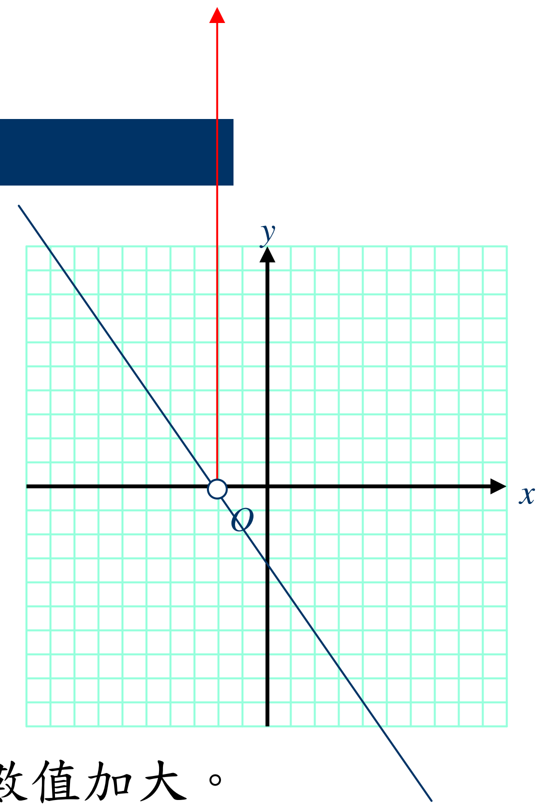
$(-2,0)$是$3x+2y+6=0$的一個解。

若現在你將x坐標的-2固定不動，將y坐標的數值加大。

(例如：$(-2,1/2)$)此時將此點代入$3x+2y+6$，你會發現

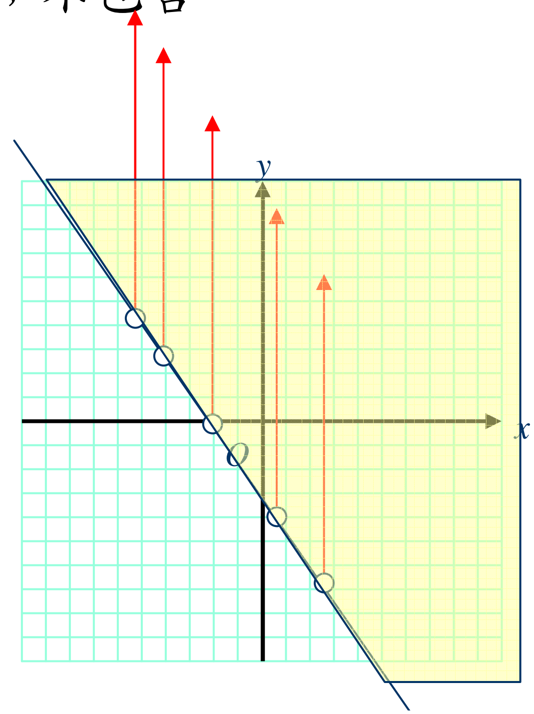
$3x+2y+6=1>0$。

也就是說$(-2,a)$其中$a>0$是$3x+2y+6>0$的解，即圖中的紅線。



四. 線性規劃-cont.

3. 同樣的，你可任意取3x＋2y＋6＝0的一解用同樣的方式畫出多條直線。
4. 求到最後會發現3x＋2y＋6＞0的解所形成之圖形即為3x＋2y＋6＝0的右半平面(即圖中的黃色區域；不包含直線3x＋2y＋6＝0)。
5. 所以當你將題目中的所有的二元一次不等式圖形畫出並取其交集(共同部分)，則此交集即為所求之可行解區域。



※注意！ 3x＋2y＋6＞0的解並不是圖形中的四邊形區域。四邊形的上下右方都是無限延伸的。

四. 線性規劃-cont.

○Sol(2)：

在可行解區域中，求目標函數P(x, y)＝ax＋by＋c的最大值或最小值，可依下列步驟：

1. 令目標函數P(x, y)＝ax＋by＋c＝0

　→繪出基準直線。

2. 令目標函數P(x, y)＝ax＋by＋c＝k

　→可得一群平行直線(這些直線稱為平行直線系)。

3. 在可行解區域中定出最大值點與最小值點。

　→k值隨著ax＋by＋c的位置而變動。

　　將ax＋by＋c＝k在可行解區域上平行移動找出極值。

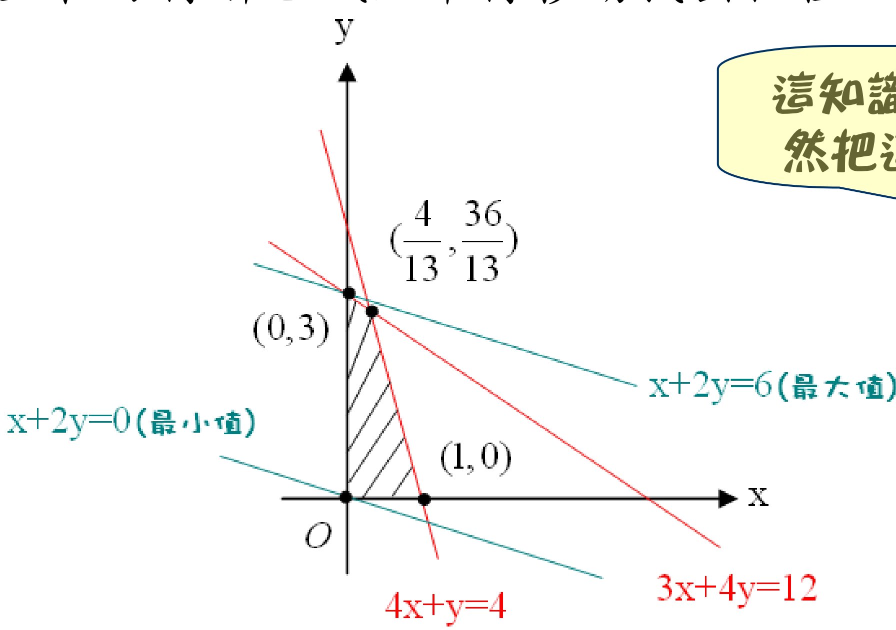
這是數學獵人試驗中重要的過關知識，我記下來了

例題(計算題)

●Ex1：在$x\geqq0$、$y\geqq0$、$4x+y\leqq4$、$3x+4y\leqq12$的條件下，$x+2y$的最大值為何？

●Sol：1. 畫出可行解區域(斜線部分；包含邊界)

2. 令目標函數$P(x,y)=x+2y=k$。
並在可行解區域上平行移動找出極值。



這知識真好用，尼特羅會長竟然把這個商業機密給說出來~

Ans：6

四. 線性規劃-cont.

● 在線性規劃計算題(Ex1)中，我們發現目標函數P(x, y)＝ax＋by＋c的極值必發生在此多邊形區域的<u>端點處</u>。

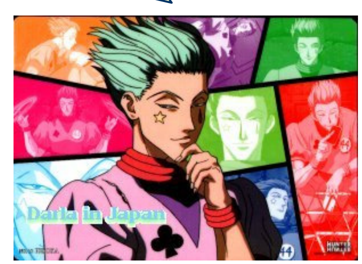
● 因此我們可以採取代入各端點比大小直接找到極值。

● 線性規劃問題解題步驟：

1. 列出限制式(不等式組)及目標函數P(x, y)
2. 繪圖(可行解區域)
3. 代入各端點比大小

※注意！在解線性規劃的應用問題時要留意答案的合理性！

三個步驟就能解決很多線性規劃的問題！尼特羅會長真厲害！我迫不及待想挑戰他了>///<

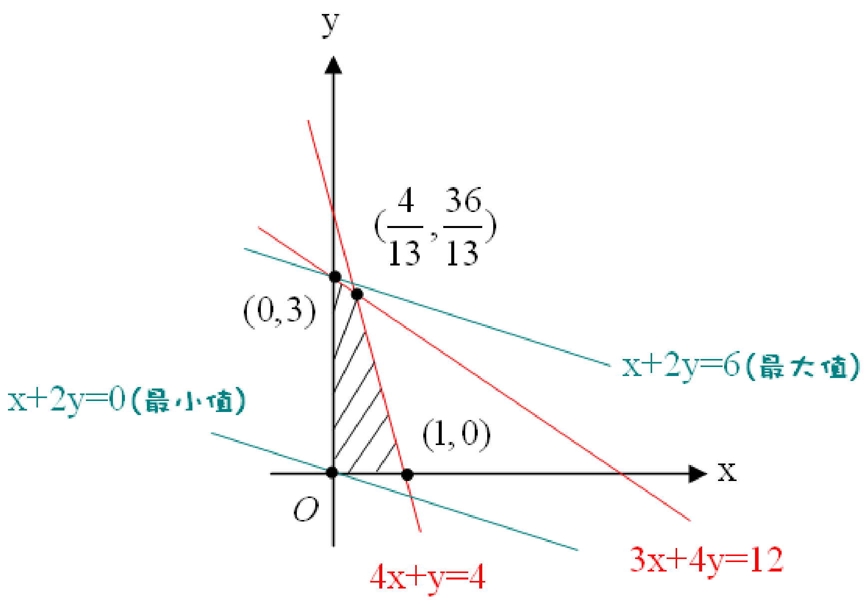


例題(計算題)

●Ex2：在x≧0、y≧0、4x＋y≦4、3x＋4y≦12的條件下，x＋2y的最大值為何？(和Ex1作比較)

●Sol：代入端點比大小

	$P=x+2y$
$(0,0)$	0
$(1,0)$	1
$(0,3)$	6(最大值)
$(\frac{4}{13},\frac{36}{13})$	$\frac{76}{13}$



Ans：6

例題(計算題-進階)

●Ex3：在x≧0、y≧0、3x+2y≦12、x+y≧2的條件下，(y+1)/(x+2)的最大值為何？

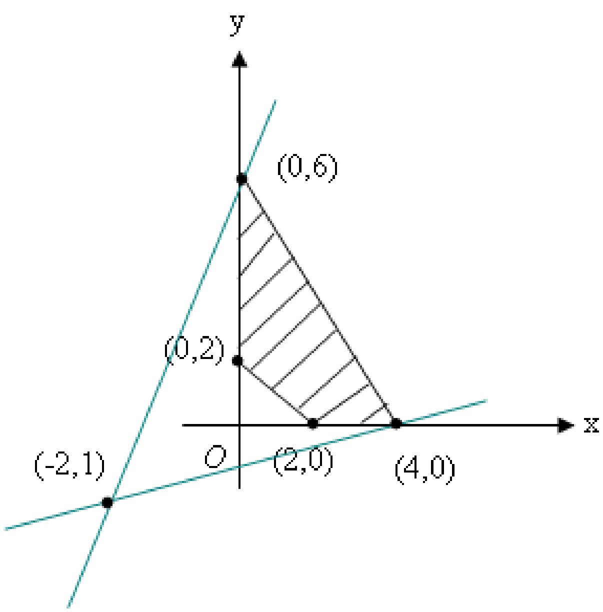
●Sol：

$$令m=\frac{y+1}{x+2}$$

$$\Rightarrow m=\frac{y-(-1)}{x-(-2)}(=斜率)$$

$$(0,6)\Rightarrow\frac{6+1}{0+2}=\frac{7}{2}(\text{Max})$$

$$(4,0)\Rightarrow\frac{0+1}{4+2}=\frac{1}{6}(\text{min})$$



Ans：7/2；1/6

例題(應用題)

- Ex4：南北生技農場今年生產一種植物共1萬公斤，該植物每200公斤可提煉1公斤的中草藥，每5公斤可製成1公斤的健康食品。中草藥每公斤可獲利5000元，健康食品每公斤可獲利100元；根據市場調查每年中草藥最大需求量為30公斤，健康食品最大需求量是1800公斤。如果南北生技農場決定提煉中草藥x公斤，並製成健康食品y公斤，設P為其可獲利潤。

(1)試以x、y表示P。

(2)如果想獲得最大利潤，則x、y的值為何？

對我這位忍者來說，中草藥時常用到，所以線性規劃真是方便的工具^^

例題(應用題)

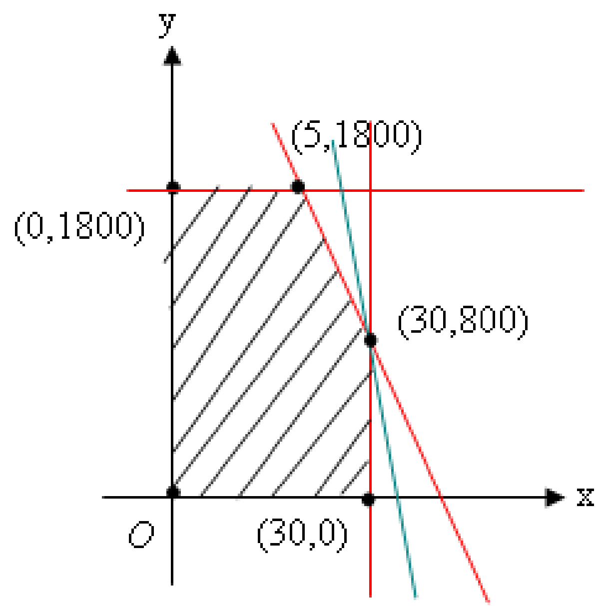
●Sol(2)：

1. 列出限制式(不等式組)及目標函數P(x, y)：

$$\begin{cases} 200x+5y\leqq 10000 \\ 0\leqq x\leqq 30 \\ 0\leqq y\leqq 1800 \end{cases}$$

$P(x, y)=5000x+100y$

2. 繪圖(可行解區域)：



例題(應用題)

3. 代入各端點比大小：

	$P=5000x+100y$
$(0,0)$	0
$(30,0)$	150000
$(30,800)$	230000 (最大值)
$(5,1800)$	205000
$(0,1800)$	180000

喀喀喀喀喀喀！

Ans：(1) $P(x,y)=5000x+100y$ (2)$(30,800)$

例題(應用題-整數點限制)

- Ex5：在面積為72000平方公尺的建築用地上，以不超過六千九百萬元的建築費，建A、B兩種住宅。A種住宅每戶160平方公尺，造價24萬元；B種住宅每戶240平方公尺，造價15萬元。試問A、B各建幾戶時總戶數為最多？

- Sol：列出限制式(不等式組)及目標函數P(x, y)：
  設建A住宅x戶 、B住宅y戶

$$\begin{cases} 160x+240y\leqq 72000 \\ 0\leqq x \\ 0\leqq y \\ 24x+15y\leqq 6900 \end{cases}$$

$$P(x, y)=x+y$$

例題(應用題-整數點限制)

2. 繪圖(可行解區域)：自行練習

3. 代入各端點比大小：

(287.5,0)	287.5
(1200/7,1300/7)	2500/7(最大值)
(0,0)	0
(0,300)	300

※注意：因為戶數是沒有小數點的，所以不能回答(1200/7,1300/7)，要回答(171,186)！

Ans： A住宅171戶，B住宅186戶

例題(應用題-特殊限制)

- Ex6：一五金商有二工廠，第一工廠有產品40單位，第二廠有產品50單位，該商人自甲乙兩鎮接獲訂單，甲鎮申購產品30單位，乙鎮申購產品40單位，今假定第一廠產品運用甲鎮每單位運費為10元，運到乙鎮每單位運費為14元，第二廠產品運到每單位運費12元，運到乙鎮每單位運費15元，則第一廠取產品______單位運往甲鎮______單位運往乙鎮較為經濟(即運費最少)？

※條件糾結在一起，但是線性規劃的問題通常只能假設<u>兩個變量</u>。

這題換我來解！

例題(應用題-特殊限制)

- Sol：

  1. 列出限制式(不等式組)及目標函數P(x, y)：

     設第一廠運往甲x單位，運往乙y單位

     則第二廠運往乙30－x單位，運往乙40－y單位

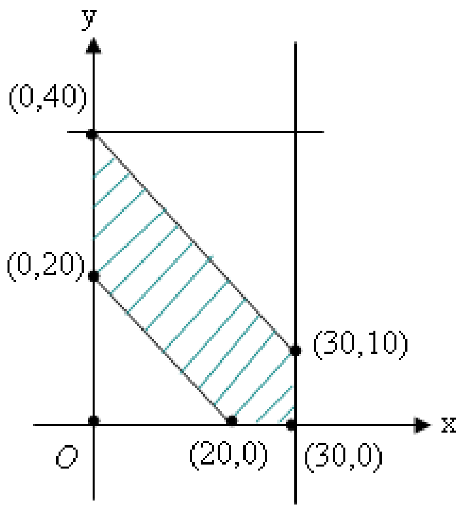
$$\begin{cases} 0 \le x \le 30 \\ 0 \le y \le 40 \\ 0 \le x + y \le 40 \\ 0 \le (30 - x) + (40 - y) \le 50 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(x, y) &= 10x + 14y + 12(30 - x) + 15(40 - y) \\ &= -2x - y + 960 \end{aligned}$$

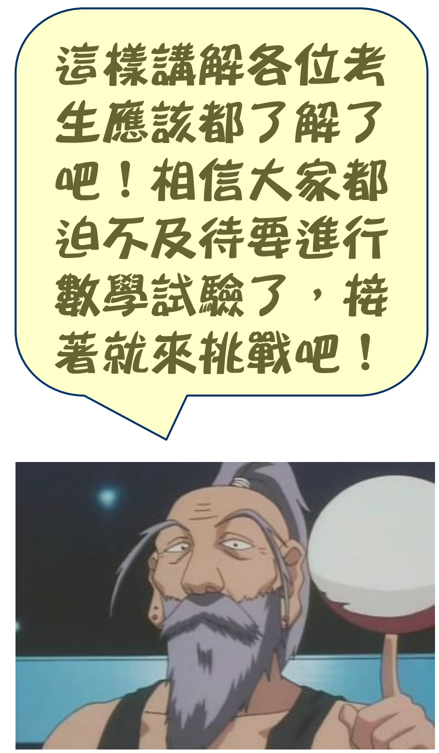
 例題(應用題-特殊限制)

2. 繪圖(可行解區域)：

3. 代入各端點比大小：



	P=960-2x-y
(20,0)	920
(30,0)	900
(30,10)	890(最小值)
(0,40)	920
(0,20)	940



Ans：第一廠取產品30單位運往甲鎮，10單位運往乙鎮較為經濟