3-3數學期望值

期望值是什麼？

- 思考一個問題吧！
- 若有一個遊戲，擲一顆公正骰子一次，若擲出點數為1或2，則可獲得10元；但若擲出其它事件，則要賠20元。請問，你(妳)會不會玩這場遊戲？為什麼？
- 如果現變成若擲出點數為1或2可得1000元，其他事件則不變呢，玩不玩？
- 用你的直覺跟周圍同學討論看看吧~
- 等等請同學發表一下意見、想法唷！

期望值的意義

- 設某地區發行一種彩券一萬張，每張彩券有四個號碼，從0000到9999，四位數全對為第一獎，末三位數對為第二獎，末兩位對為第三獎，末一位數字對為第四獎，但每張彩券不可以重覆得兩個獎項。(如下圖)

獎項	名額	獎金(元)
第一獎	1	50000
第二獎	9	10000
第三獎	90	2000
第四獎	900	500
未中獎	9000	0

獎項	名額	獎金(元)
第一獎	1	50000
第二獎	9	10000
第三獎	90	2000
第四獎	900	500
未中獎	9000	0

Q：若現在黑熊老師想要買一張彩券，請問一張彩券的平均價值是多少？

獎項	名額	獎金(元)
第一獎	1	50000
第二獎	9	10000
第三獎	90	2000
第四獎	900	500
未中獎	9000	0

- 想法一：假設黑熊老師全部一萬張彩券買下，則總獎金為

$$50000\times1+10000\times9+2000\times90+500\times900=770000$$

- 則一張彩券的價值為…$\dfrac{770000}{10000}=77$ 元

獎項	名額	獎金(元)
第一獎	1	50000
第二獎	9	10000
第三獎	90	2000
第四獎	900	500
未中獎	9000	0

第一獎的報酬

- 另一種想法：

$$77=\frac{770000}{10000}=\frac{50000\times1+10000\times9+2000\times90+500\times900}{10000}$$

$$=\boxed{50000}\times\boxed{\frac{1}{10000}}+10000\times\frac{9}{10000}+2000\times\frac{90}{10000}+500\times\frac{900}{10000}$$

中第一獎的機率

- 其實此**平均價值**又可稱為**期望值**。

期望值

講義P.154

- 所以期望值是一種**平均報酬**。
- 也就是將所有的可能的**報酬×得此報酬的機率加總**後所得
- 令可能報酬叫做 m_i，P_i 為得到報酬 m_i 的機率，則 $\sum_{i=1}^{k} m_i P_i$ 稱為期望值。(其中 k 為可能的報酬種類)
- 若以 m 表示期望值，則 $m = \sum_{i=1}^{k} m_i P_i$

解期望值的方法

- **<u>列表格</u>**，將所有 m_i 以及對應的 P_i 列出，再對應相乘後相加即可。(穩當)
- 利用**<u>平均價值</u>**的概念解題。(快速、簡單易懂)
  - (**<u>加權平均的概念</u>**)
- 若求兩次或多次試驗的期望值，可**<u>先求一次期望值為多少</u>**，再乘以對應次數。(常常用)

範例一

講義P.154

- Q：投擲二公正骰子，若出現點數和k，則給k元，求其期望值。
- <Sol>
  - *解法一：列出表格* ***（熊：這個方法一定要會，最不容易出錯）***

點數和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
m_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

- 所以 $m=2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}$

$$+8\times\frac{5}{36}+9\times\frac{4}{36}+10\times\frac{3}{36}+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36}$$

$$=\frac{252}{36}=7$$

- 還記得剛剛講期望值其實就是什麼嗎？

→*期望值是一種平均報酬*。

- 另解：秒殺技！！！！
  - 利用(加權)平均值就是期望值，則投一顆骰子的期望值為 $\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}$
  - 所以投兩顆的期望值為 $\frac{7}{2}\times 2=7$

範例二

講義P.155

- Q：設袋中有10元硬幣兩枚，5元硬幣四枚，今自袋中任取兩枚，求期望值為何？
- <Sol>
- 一樣有兩種解法：同學試試看吧！
- 第一種列表格：

事件	兩枚10元	兩枚5元	一枚10元、一枚5元
P_i	$\frac{C_2^2}{C_2^6}=\frac{1}{15}$	$\frac{C_2^4}{C_2^6}=\frac{6}{15}$	$\frac{C_1^2C_1^4}{C_2^6}=\frac{8}{15}$
m_i	20	10	15

10元硬幣兩枚，5元硬幣四枚，取兩枚

- 所以 $m = 20\times\frac{1}{15} + 10\times\frac{6}{15} + 15\times\frac{8}{15} = \frac{40}{3}$ 元

- 另解： 利用平均值
  - 算取一枚的平均值(期望值) $\frac{10\times 2 + 5\times 4}{6} = \frac{40}{6}$
  - 所以取兩枚的期望值為 $\frac{40}{6}\times 2 = \frac{40}{3}$ 元

不要打我T___T” 請拿出紙來吧

Q：從1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9中，任取兩相異數，則其積為完全立方數的機率為何？[90.學測]

(Hint：ex $8 = 2^3$，所以稱8為完全立方數)

範例三

講義P.155

- Q：某市為了籌措經費而發行彩券，該市決定每張彩券售價為10元；且每發行一百萬張彩券，就附有一百萬元獎1張，十萬元獎9張，一萬元獎90張，一千元獎900張。假設某次彩券發行共三百萬張，試問當你購買一張彩券時，你預期會損失多少元？

熊：還沒買就預期會損失，也太觸霉頭吧(／‵　　′)／~ ┴┴

一張十元，發行三百萬張，購買一張會損失多少錢？

- <Sol> *做個表格。三百萬張彩券的獎項如下表：*

獎項	1000000	10000	10000	1000
張數	1×3=3	9×3=27	90×3=270	900×3=2700

- *所以購買一張彩券的期望值為*

$$1000000\times\frac{3}{3000000}+100000\times\frac{27}{3000000}+10000\times\frac{270}{3000000}$$

$$+1000\times\frac{2700}{3000000}=3.7$$

損失 $10-3.7=6.3$

(元)

範例四

講義P.156

- Q ：某保險公司的旅遊意外險的理賠金額(單位：元)經長期分析，獲得的機率分配如表格，若該公司對購買此保險的顧客收取200元的保費，在成本的損益分析上，該公司是盈還是虧？差額多少？

理賠金額	0	500000	1000000
機率	0.9997	0.00024	0.00006

一張保單200元

理賠金額	0	500000	1000000
機率	0.9997	0.00024	0.00006

- <Sol> *理賠金額的期望值為*

$$0\times 0.9997+500000\times 0.00024+1000000\times 0.00006=180$$

- *又180<200（元），*
  所以保險公司是盈
  差額為200-180=20（元）

重複試驗：(補充)　　　講義P.150

- 一試驗可重複進行，每次試驗成功的機率為 p，不成功的機率為 $1-p$，則連續試驗 n 次後，恰成功 r 次的機率為 $C_r^n p^r (1-p)^{n-r}$。

- 例：擲一公正骰子五次，請問恰出現三次2點的機率為何？
- <Sol> 出現2點的機率為 $\frac{1}{6}$，因此出現其他點的機率為 $\frac{5}{6}$，所以所求機率為 $C_3^5(\frac{1}{6})^3(1-\frac{1}{6})^{5-3}$

範例五

講義P.156

- Q：有一**公平賭局**，規則如下：投擲三個公正之硬幣，依照投擲結果，若出現三正面可得40元，兩個正面可得15元，一個正面可得5元，則當沒有正面時，此人應付多少元？

- 公平的賭局→獲利期望值等於0

三正40元，兩正15元，一正5元。公平。

- <Sol>
- *公平賭局→獲利期望值=0*

金額	40元 (三正)	15元 (兩正)	5元 (一正)	*-k* 元 (三反)
機率	$(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$	$C^3_2(\frac{1}{2})^2(1-\frac{1}{2})^1=\frac{3}{8}$	$C^3_1(\frac{1}{2})^1(1-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{8}$	$(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$

- *所以* $40\times\frac{1}{8}+15\times\frac{3}{8}+5\times\frac{3}{8}+(-k)\times\frac{1}{8}=0$

$\Rightarrow k=100$ *故需賠100元*

範例六

講義P.157

- Q ：某次考試，有一多重選擇題，有A 、B 、C 、D 、E五個選項。給分標準為完全答對得5分，只答錯一個選項給2.5分，答錯兩個或兩個以上的選項得0分。若某一考生對該題的A 、B選項已確定是應選的正確答案，但C 、D 、E三個選項根本看不懂，決定這三個選項要用猜的來作答，則此題所得分數的期望值為幾分？

- <Sol>
- *僅針對C、D、E三選項*

事件	全對	對兩個	對一個	全錯
機率	$(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$	$C_2^3(\frac{1}{2})^2(1-\frac{1}{2})^1=\frac{3}{8}$	$C_1^3(\frac{1}{2})^1(1-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{8}$	$(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$
得分	5	2.5	0	0

- *所以期望得分*

$$=5\times\frac{1}{8}+2.5\times\frac{3}{8}+0+0=\frac{25}{16}$$

範例七

講義P.158

- 題目好長，一頁PPT打不完。囧！
- 想法：列表格解。

- <Sol>

景氣 / 規模(P)	高度成長 $P_1 = 0.3$	微幅成長 $P_2 = 0.1$	持平 $P_3 = 0.4$	衰退 $P_4 = 0.2$
大	50	10	5	-30
中	40	30	10	-10
小	30	20	5	-2

景氣 (P) / 規模	高度成長 $P_1 = 0.3$	微幅成長 $P_2 = 0.1$	持平 $P_3 = 0.4$	衰退 $P_4 = 0.2$
大	50	10	5	-30
中	40	30	10	-10
小	30	20	[illegible]	-2

所以選用中規模，利潤最好 未來一年利潤為17(百萬元)。

- 大規模利潤期望值
$$=50\times0.3+10\times0.1+5\times0.4+(-30)\times0.2=12$$
- 中規模利潤期望值
$$=40\times0.3+30\times0.1+10\times0.4+(-10)\times0.2=17$$
- 小規模利潤期望值
$$=30\times0.3+20\times0.1+5\times0.4+(-2)\times0.2=12.6$$