3-2 機率的性質

地點：師大附中1182
日期：2009/04/08、04/10

科科，想想看！

* 日劇 詐欺遊戲

  來看個片段吧！

[影片1、公平的遊戲嗎？]

* 詐欺遊戲這部日劇中，在這一集內小直面對福永所提出來的遊戲，小直是否應該跟他比賽呢？勝率真的是1/2嗎？

* **想知道嗎？老師告訴你！**
  但不是現在= = "

古典機率

講義 P.142

- 拉普拉斯的古典機率：
- 設S為有n個樣本點的樣本空間，又假設其中各基本事件出現的**機會均等**，若 $A \subset S$ 為一事件，則事件A發生的機率為A的元素個數與n的比值。

  記為

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n}.$$

機會均等

課本P.161

* 什麼是機會均等？還記得前兩堂課講的例子嗎？

* 例如：一個袋中有3個紅球、2個藍球，從袋中任取一球，求取出藍球的機率是多少？

3個紅球、2個藍球，任取一球

- 想法一：因為取出的球不是紅球就是藍球，因此樣本空間為$S=\{$紅球，藍球$\}$，所以取出藍球的機率是1/2 。

  (X) 每個樣本的出現機會不均等。

- 想法二：因為任取一顆球，考慮每顆球是不同的(雖然同色)，將樣本空間表示成

  $S=\{$紅1, 紅2, 紅3, 藍1, 藍2$\}$，所以藍球出現機率是2/5 。

  (O) 每個樣本的出現機會均等。

範例一

講義 P.142

* Q：擲一顆均勻骰子(即各點出現的機會均等)，試求：(1)出現偶數點的機率 (2)出現點數大於4的機率.

<Sol>

* *先寫出樣本空間$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$n(S)=6$*
* *(1) 出現偶數點的事件$A=\{2, 4, 6\}$，$n(A)=3$*

  所以$P(A)=3/6=1/2$.
* *(2) 出現點數大於4的事件$B=\{5, 6\}$，$n(B)=2$*

  所以$P(B)=2/6=1/3$.

範例二

講義 P.143

- Q：擲兩個骰子，觀察每個骰子出現的點數，請問： (1)點數和為八的機率 (2)點數相異的機率.

<Sol>

- ***先考慮樣本空間的個數：***

法一：如講義P.140例題四 全列出

(很棒的方法，你們想要看老師再寫出來一次嗎
= = ?)

- 科技進步的現在，老師就將樣本空間秀給大家看吧！讓我不要再寫了啦！ 囧
- S={(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)
  (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
  (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)
  (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)
  (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)
  (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

* 先考慮樣本空間的個數：
* *法二： 第一顆骰子有6種可能；第二顆亦然，所以擲兩顆骰子共有6 X 6=36個種可能*

* *(1)點數和為8的事件，令其為 A*

  則A ={ (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)}，n(A)=5

  所以，P(A)=5/36.

  我們來看一下點數和為8的樣本點在樣本空間的哪裡

* S={(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)
(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)
(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)
(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)
(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

想想看：那點數和為6、7、9...的機率分別為多少呢？

- <Sol>

(2)令點數相異的事件為B，n(B)=30

(請自己數一下)

所以P(B)=30/36=5/6.

範例三

講義 P.143

- Q：一袋中有3個白球、4個黑球、5個紅球，自袋中一次任取4球，求下列各事件的機率：

  (1) 2個黑球，2個紅球.

  (2) 每色球至少取一個.

  (3) 4個球均異色.

3個白球、4個黑球、5個紅球

- <Sol>

  先考慮樣本空間，總共12顆球，要取4顆，

  所以樣本空間為C_4^{12}*=495*

  (1) 2黑2紅

  取法有 $C_2^4 \times C_2^5$ *種*

  所以，所求機率為

$$\frac{C_2^4 \times C_2^5}{C_4^{12}} = \frac{6 \times 10}{495} = \frac{4}{33} \quad .$$

3個白球、4個黑球、5個紅球

- <Sol>

  (2)每色球至少取一個.

白取2個，其餘各取1個　　黑取2個，其餘各取1個　　紅取2個，其餘各取1個

$$\frac{C_2^3\times C_1^4\times C_1^5+C_1^3\times C_2^4\times C_1^5+C_1^3\times C_1^4\times C_2^5}{C_4^{12}}$$

樣本空間個數

$$=\frac{60+90+120}{495}=\frac{270}{495}=\frac{6}{11}$$

3個白球、4個黑球、5個紅球

- <Sol>
- *(3) 4個球均異色*

  球只有三種顏色，不可能全部4顆異色

  → *不可能事件* → $p=0$.

範例四

講義 P.144

* Q：一盒中有10個球，球上分別印有號碼1到10，今由盒中一次取4球，則4球之號碼中數目第二大數目是7的機率為何？

編號1-10，抽4顆，第二大為7

* <Sol>
* *樣本空間個數=n(S)* $= C_4^{10}$ *=210.*
  * *4球之號碼* → □ 7 □ □ (由大到小排列)

    8, 9, 10   *1, 2, 3, 4, 5, 6 取兩球*

  * *所以n(A)* $= C_1^3 \times C_2^6$ *=45*
  * *故P(A)* $= \dfrac{45}{210} = \dfrac{3}{14}$

範例六

講義 P.145

- Q：一副撲克(A poker han)是從52張牌中任取5張牌，設機會均等，從一副撲克牌中(52張)中，任取5張，求下列之機率：

  (1)Full house.(2張同點數，另外3張同點數)

  (2)5張牌同花色.

52張牌中任取5張牌

- <Sol>
  - *樣本空間為* C_5^{52}
  - *(1) (xx yyy)*
  - *所求機率為*

從13種點數內先挑一種為x，每張點數有四種花色，取兩種即可。

從剩下的12種點數內挑一種為y，每張點數有四種花色，取三張即可。

$$\frac{(C_1^{13} \times C_2^4) \times (C_1^{12} \times C_3^4)}{C_5^{52}} = \frac{6}{4165}$$

52張牌中任取5張牌

- <Sol>
  - *樣本空間為* C_5^{52}
  - *(2) 5張同花色*
  - *以花色為主，先選取一種花色→再從13張內取5張*
  - *所以所求機率為*

$$p=\frac{C_1^4\times C_5^{13}}{C_5^{52}}=\frac{33}{16660}$$

範例七

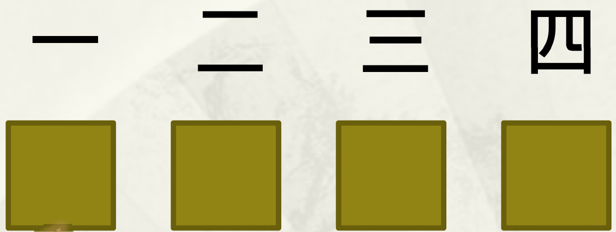
講義 P.145

- Q：有8位旅客，搭乘一列掛有4節車廂的火車，則第一節車廂恰有2位旅客的機率為何？
- <Sol>
- *樣本空間為：*
  - *總共有4節車廂，8位旅客，則全部選法有*

$$4\times4\times4\times4\times4\times4\times4\times4=4^8=2^{16}$$ *種*

8旅客、 4車廂，第一節車廂恰有2位旅客

* <Sol>



C^8_2

剩下6個人，每個人剩三種選法

* *所求機率為*

$$p=\frac{C^8_2\times 3\times 3\times 3\times 3\times 3\times 3}{2^{16}}=\frac{7\times 3^6}{2^{14}}$$

數學家小故事

- 拉普拉斯(Laplace 1749~1827)
- 作為一個數理天文學家，
  拉普拉斯被稱為法國的牛頓(Newton)
- 遺言：「我們知道的不多，我們未知的無限。」
- 自卑的身世？
- 亂世中的政客？
- 謙虛的天才！

範例八

講義 P.146

* Q ：若袋中有同式樣的黑襪3雙、紅襪2雙，自袋中任取4隻，則4隻恰為兩雙的機率為何？**(提示：襪子不分左右)**

* <Sol>
  * *樣本空間個數：襪子不分左右，共有10隻襪子*
  * *現取4隻，所以樣本空間個數為...* C_4^{10}

黑3雙、紅2雙，任取4隻，恰為兩雙

* <Sol>
* *恰為兩雙的情形有…*
* *兩雙皆為黑，方法數有* $C_4^6 = 15$ *種*
* *兩雙皆為紅，方法數有* $C_4^4 = 1$ *種*
* *一雙黑一雙紅，方法數為* $C_2^6 \times C_2^4 = 90$ *種*
* *所求機率*

$$p = \frac{15+1+90}{210} = \frac{106}{210} = \frac{53}{105}$$

還記得一開始的問題嗎

- 詐欺遊戲這部日劇中，在這一集內小直面對福永所提出來的遊戲，小直是否應該跟他比賽呢？勝率真的是1/2嗎？
- 有沒有同學忘記遊戲規則了？
- 各位公子公主花三分鐘跟鄰居討論一下吧！
- 最後，小直不負眾望輸了！運氣嗎？
- 看一下到底為什麼呢？
- 影片2：秋山的正確答案

檢視一下

- 嘿嘿 來提振精神一下吧！
- Q ：一袋中有6個球，編號1~6號，自袋中取球觀察抽中號碼的試驗中，若**一次取二球**，則…

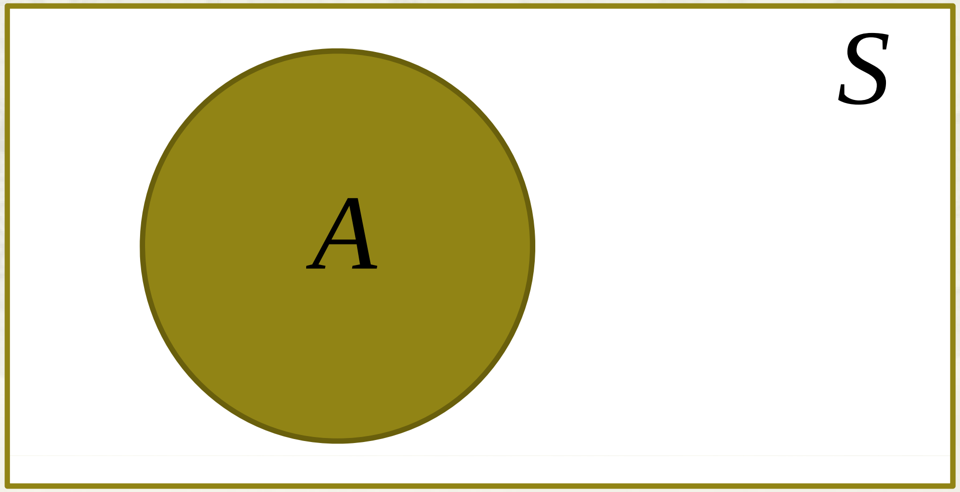
  (1)抽中號碼的樣本空間為何？

  (2)若$\boldsymbol{A}$表示點數和大於7的事件、$\boldsymbol{B}$表示點數差為2的事件，則$P(A)$ 、$P(B)$分別為多少？

機率的性質

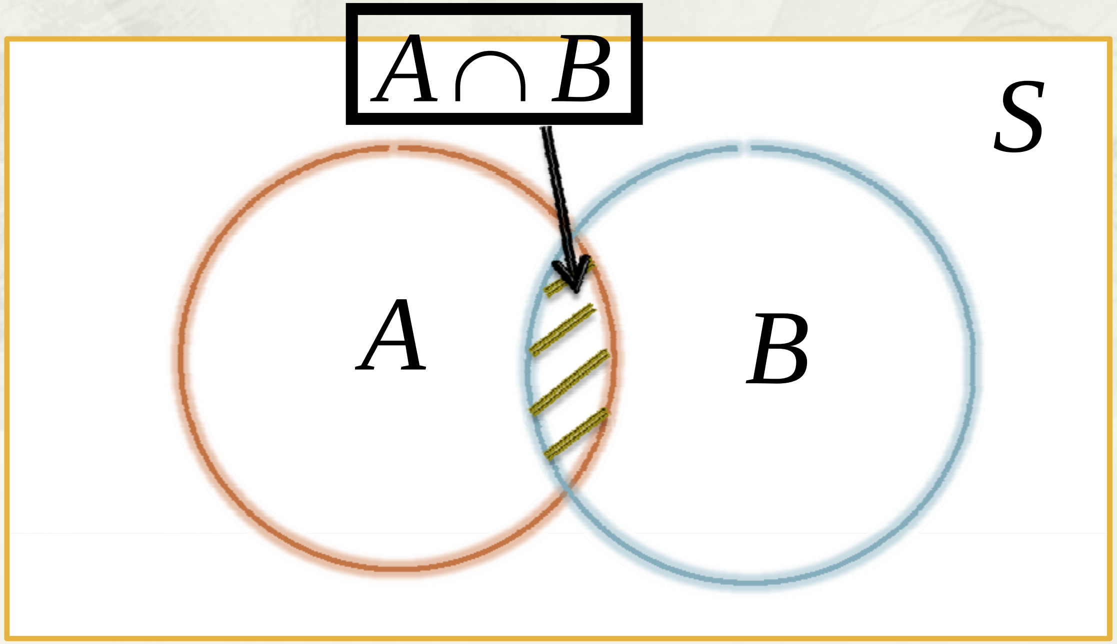
講義 P.146

- (1) $P(\phi)=0$
- (2) $P(S)=1$ Ex.擲一骰子，求點數不大於六的機率為何？
- (3)若 $A\subset S$，則 $0\le P(A)\le 1$

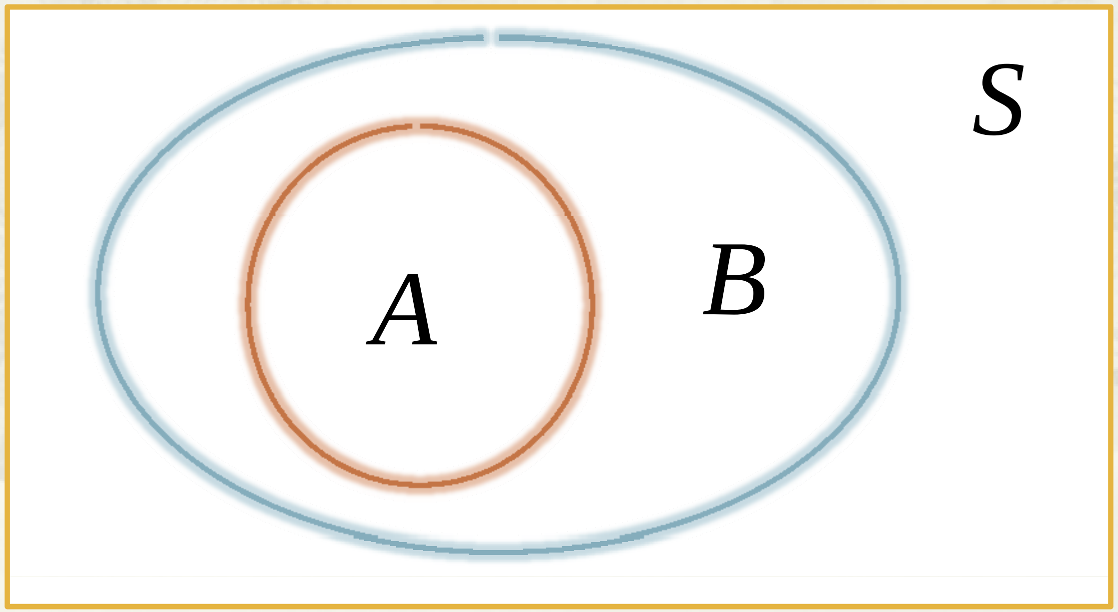


* (4)若 $A \subset S$ ，則 $P(A') = 1 - P(A)$
* (5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

  若A、B互斥，則 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



* (6)若A、B為S中的事件，且 $A \subset B$ ，則 $P(A) \le P(B)$.



- (7)機率排容原理：想法同在第二章學到的排容原理

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$
$$-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)$$
$$+P(A\cap B\cap C)$$

- 這裡的文氏圖請同學自己練習畫畫看
- 試著找出 $A\cup B\cup C$ 與**A**、**B**、**C**的關係

範例九

講義 P.147

* Q：設A 、B表示兩事件，且 $P(A\cup B)=\dfrac{3}{4}$，$P(A')=\dfrac{2}{3}$，$P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}$ 試求：

(1) $P(A)$.

(2) $P(B)$.

(3) $P(A-B)$.

- <Sol>
- (1) $P(A') = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{3}$$

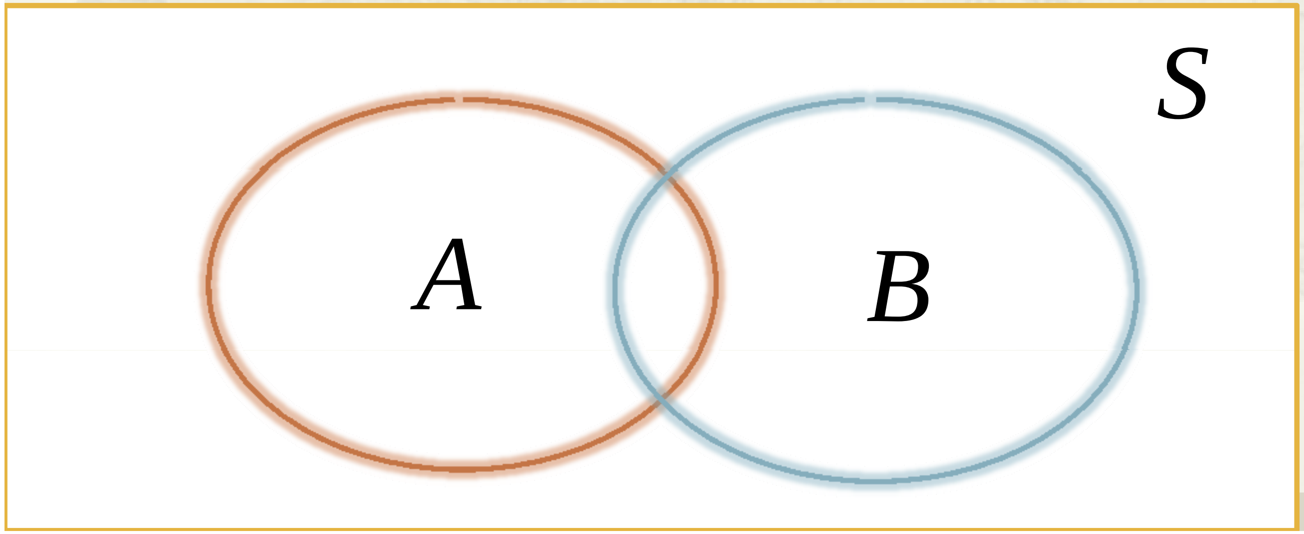
- (2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(B) = \frac{2}{3}$$

* <Sol>
* (3) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$



範例十

- Q ：假設任意取得統一發票，其號碼之個位數字為0, 1,2, ..., 9中任一數字，且這些數出現的機率相等。今自三不同場所，各取得一張統一發票，則三張統一發票號碼個位數字中，
- (1)至少有一個為0之機率為多少？
- (2)至少有一個為0且至少有一個為9的機率為多少？

三張發票個位數中，至少有一個為0

- <Sol>
- *(1)解法一：所求機率=1-P(三張皆不為0)*

  $= 1-(0.9)^3 = 0.271$

- *解法二：考慮一張為0、兩張為0、三張為0的情形*

$$p = \frac{C_1^3 C_1^9 C_1^9 + C_2^3 C_1^9 + C_3^3}{10 \times 10 \times 10} = 0.271$$

* <Sol>
* *(2)P(至少有一個0且至少有一個9)*

=1- P(沒有0或沒有9)

=1-[P(沒有0)+P(沒有9)-P(沒有0且沒有9)]

$$=1-[(\frac{9}{10})^3+(\frac{9}{10})^3-(\frac{8}{10})^3]$$

$$=1-0.729-0.729+0.512=0.0054$$

最後

* 動動腦時間：問題就在動畫中