2-4空間中的直線方程式

國立新莊高級中學202班 98學年度上學期

授課教師：林岳璋 實習老師

方向向量

課本P.119

- <u>方向向量</u>：空間坐標中向量 $\vec{d}=(l,m,n)$ 與直線L平行，則可稱 $\vec{d}=(l,m,n)$ 為直線L 的一個方向向量。

- <u>注意</u>：滿足上述條件，若存在與向量 $\vec{d}$ 平行的其它向量，例如：$\vec{t}\,//\,\vec{d}$，則向量$\vec{t}$ 亦可稱為直線L的方向向量。因此方向向量的表示法<u>不唯一</u>。
- ex：$\vec{d}=(3,3,-9)$ 可取平行向量 $\vec{t}=(1,1,-3)$ 為新的方向向量。

空間中的直線方程式表示法

課本P.119

- 空間中的直線方程式表示法主要有三種：
- 第一種：直線的參數式
- 第二種：對稱比例式
- 第三種：兩面式

甲、直線的參數式

課本P.119

- 還記得平面中的直線參數式如何產生嗎？(可自行參閱課本P.47~48)
- 空間中的直線參數式

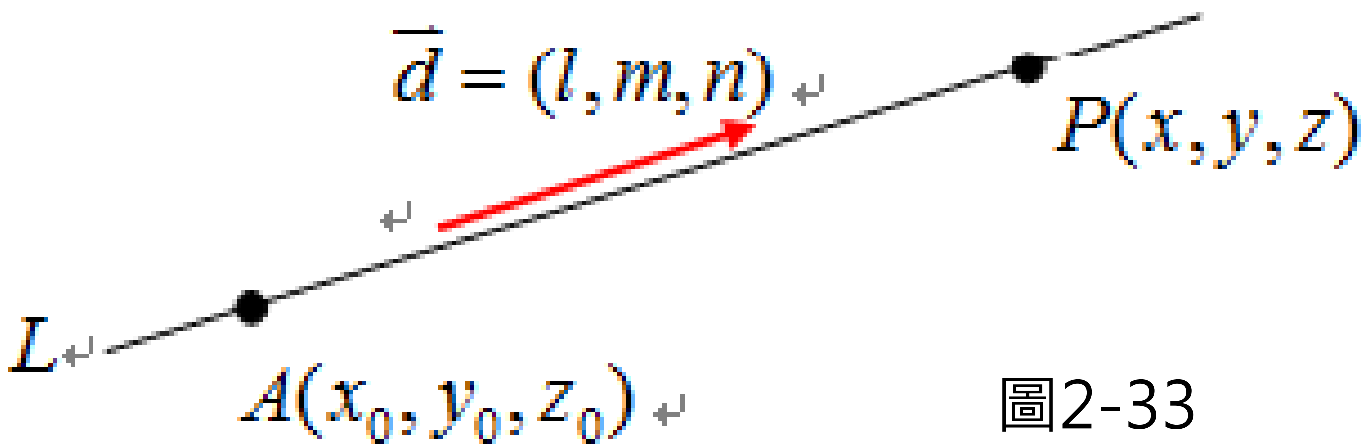
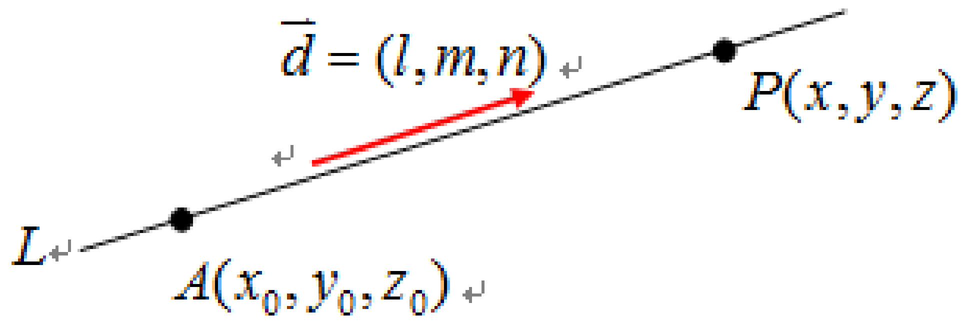


圖2-33

圖2-33



- 動點 $P\neq A$ 且 $P(x,y,z)$ 在直線**L**上的充要條件為 $\overrightarrow{AP}\,/\!/\,\vec{d}$ 即 $\overrightarrow{AP}=t\vec{d}$ ，t是實數
- ....
- $$\begin{cases} x=x_0+l\cdot t \\ y=y_0+m\cdot t \\ z=z_0+n\cdot t \end{cases}$$ ，t為實數

課本P.120

- **直線參數式*L*** ： $\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t \\ y = y_0 + m \cdot t \text{ , } t\text{為實數} \\ z = z_0 + n \cdot t \end{cases}$
- **除非必要否則『*t*為實數』可省略。**
- **若** $B(x_0', y_0', z_0')$ **為直線*L*上另外一點，可將**

參數式改寫成*L*： $\begin{cases} x = x_0' + l \cdot t \\ y = y_0' + m \cdot t \\ z = z_0' + n \cdot t \end{cases}$

隨堂練習

課本P.120

- 1、直線參數式L ：$\begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = -5 + 5t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$
- 2、直線參數式 ：$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$
- 3、$t=0$的點 $(-1, 2, 5)$，

  L的方向向量為 $(3, -7, 2)$

空間中，平面與直線關係

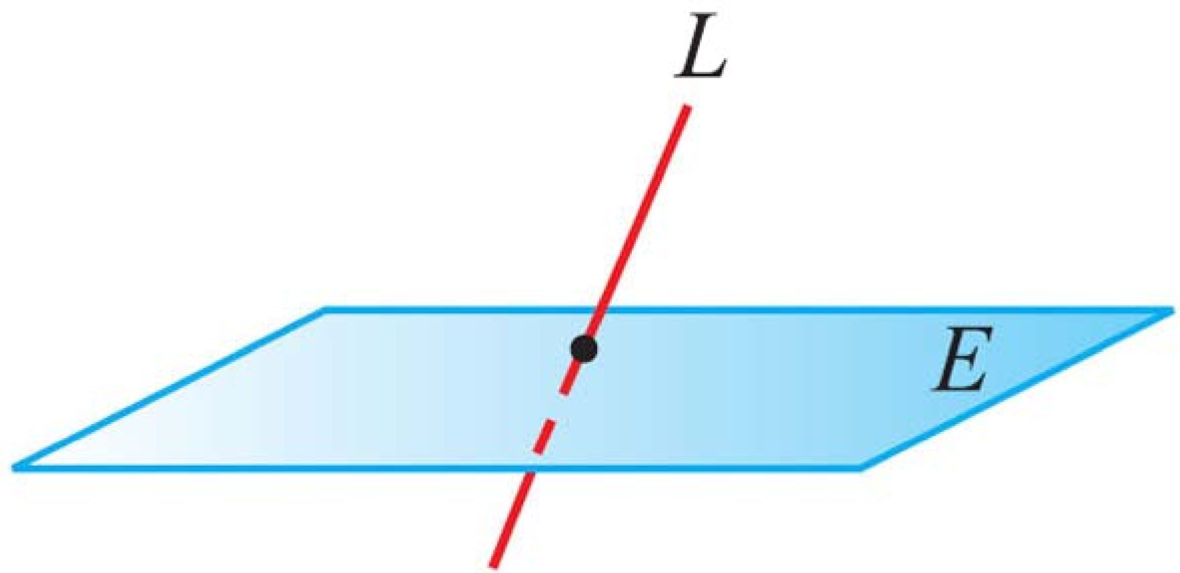
(1)直線 L 與平面 E 沒有交點.

（稱 L 與 E 平行）

空間中，平面與直線關係

(2)直線 L 與平面 E 有一個交點.

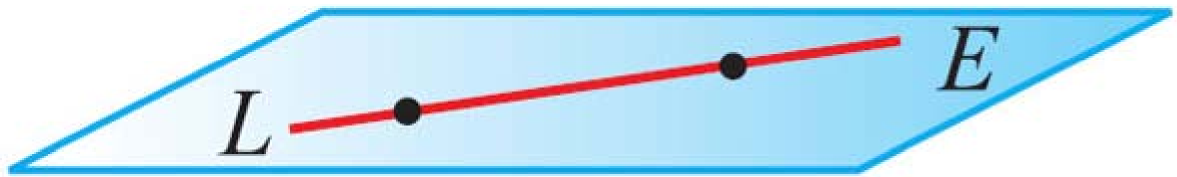
（L 與 E 交於一點）



空間中，平面與直線關係

(3) 直線 L 與平面 E 有兩個交點.

（由公設三知 L 在 E 上）



例題一

課本P.120

隨堂練習

課本P.121

- 設直線L：$\begin{cases} x=-2+5t \\ y=4+3t \\ z=-3+3t \end{cases}$，平面$E$：$3x-y-4z-2=0$

  試判斷直線L與平面E的關係。

- <Sol>將L參數式代入平面E可解得

  $-6+15t-4-3t+12-12t-2=0$

  $\rightarrow \quad 0t=0$

  所以 t是實數，因此所求L的點皆在平面E上

課本P.121

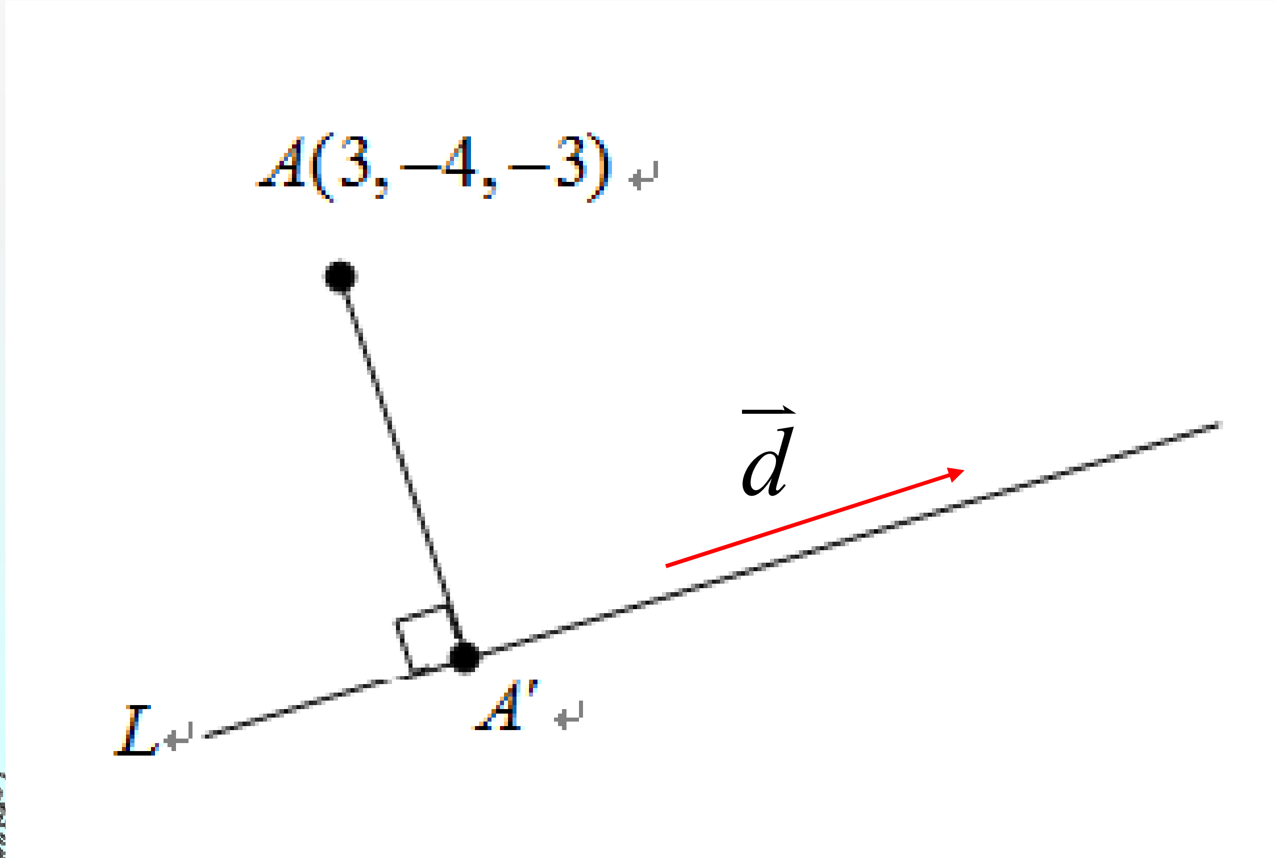
- 因此，若將直線L參數式代至平面E後，解出t的情形，若...

t 的情形	直線L與平面E的關係
恰有一解	相交於平面E上一點
無解	直線L與平面E不相交
無限多解	直線L在平面E上

例題二、隨堂練習

課本P.121、122

- *Hint*：投影點坐標，即找直線L上一點與A點為**最短距離**的點。

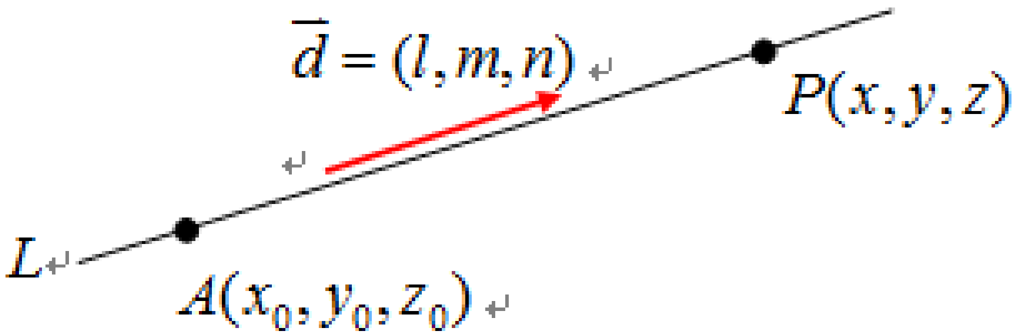


乙、直線的對稱比例式

課本P.122

- 動點 $P \neq A$ 且 $P(x, y, z)$ 在直線L上的充要條件為 $\overrightarrow{AP} // \vec{d}$.
- 即 $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) // (l, m, n)$
- 當l, m, n皆不為0時，上述條件即

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$



課本P.122

- 當l, m, n中有0時，我們以參數式表示即可
- $$L:\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 7t \\ z = 4 \end{cases}$$
- 或可表式成 $L:\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-7} \\ z = 4 \end{cases}$

隨堂練習

課本P.123

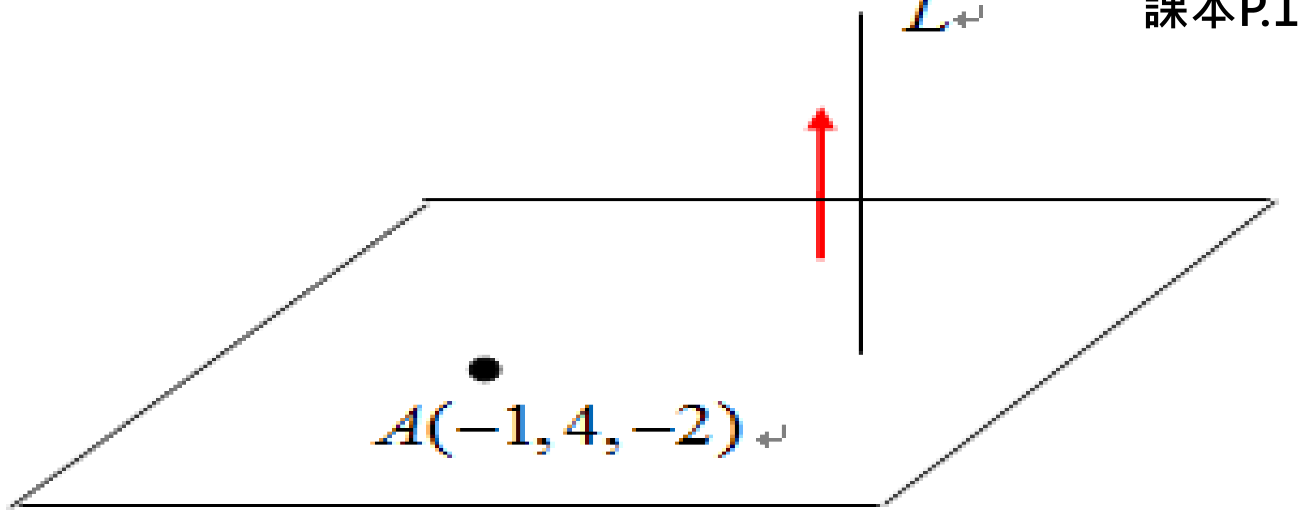
- <Sol> 點$(1, -4, -5)$在L上，
  L的方向向量$(2, -3, 7)$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -4 - 3t \\ z = -5 + 7t \end{cases}$$

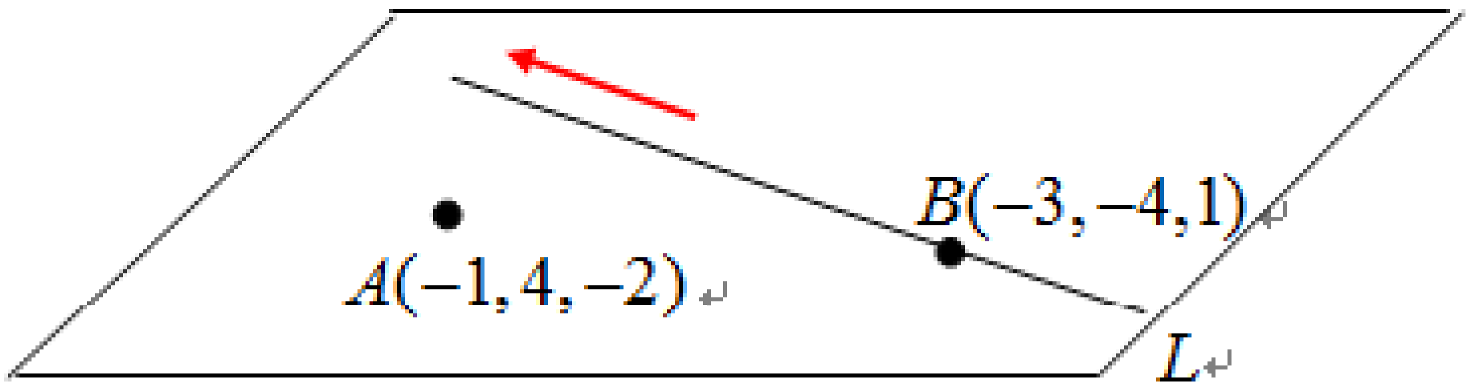
例題三

課本P.123

- (1)



- (2)



例題三

課本P.123

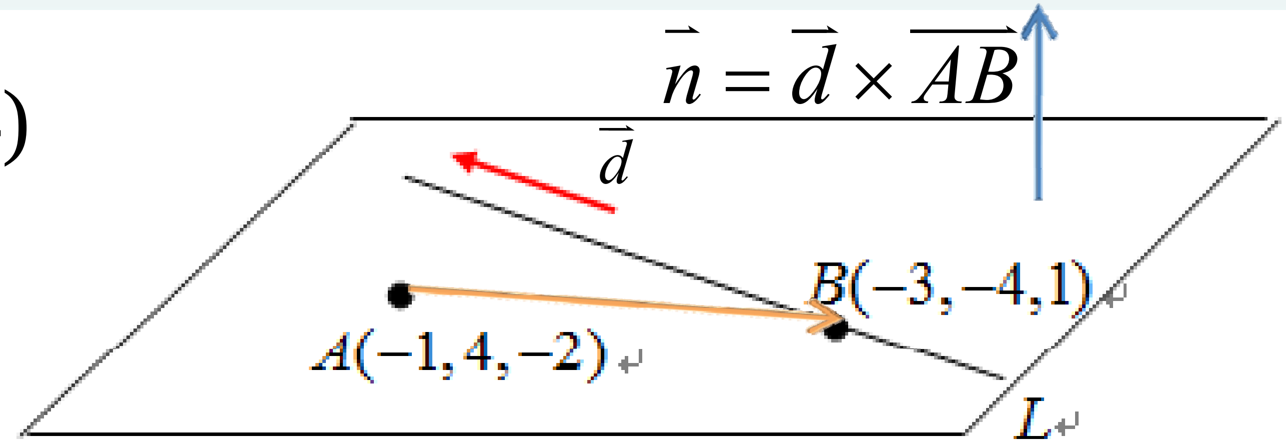
- <Sol>
- (2)先算 $\overline{AB}=(-2,-8,3)$

  此平面之法向量可利用L方向向量 $\vec{d}$ 與 $\overline{AB}$

  外積求之。

$\vec{d}\times\overline{AB}=(-30,3,-12)$ 取平行向量可得

$\vec{n}=(10,-1,4)$



隨堂練習

課本P.124

- 請自行練習。
- (1) $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y+4}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$
- (2) $y+z+2=0$

例題四

課本P.124

- <Sol> 利用兩個參數式求 L_1, L_2 的交點
- 令交點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 為

  $(2+t, -3-4t, -1+2t)$與 $(7+4s, 3-3s, -1+3s)$
- 則欲使
$$\begin{cases} x_0 = 2+t = 7+4s & \ldots(1) \\ y_0 = -3-4t = 3-3s & \ldots(2) \\ z_0 = -1+2t = -1+3s & \ldots(3) \end{cases}$$
- 由(1)(2)可求得 $t=-3,\ s=-2$ 代入(3) 亦滿足
- 所以交點 $P(x_0, y_0, z_0) = (-1, 9, -7)$

隨堂練習

課本P.125

- 交點坐標(1/2, 0, 0)

空間中的直線方程式表示法

- 補充：兩面式
- 空間中兩平面的相交情形
  - 1、兩平面平行
  - 2、兩平面重合
  - 3、兩平面相交→ **相交於一直線**

將兩平面方程式寫在同一個聯立方程組內，稱為兩面式 ex、例題五

兩面式

- 可透過兩面式的變換化出空間中直線的參數式及對稱比例式
- *i.e.* 參數式 、對稱比例式、兩面式可互換。
- 兩面式換參數式的方法 **請寫在P.125頁空白處**
  - <Method 1>：令其中一個變數為參數，再行改寫。(如課本提供的解法)
  - <Method 2>：利用兩平面法向量外積可得直線方程式的方向向量，再找直線上一點，可得直線方程式。

例題五

課本P.125

- <Sol><M1>參閱課本
- <M2>
- $\overrightarrow{d_L}=\overrightarrow{n_A}\times\overrightarrow{n_B}=(2,-1,3)\times(1,4,-2)$

  $\overrightarrow{d_L}=(-10,7,9)$
- 找直線上一點
- 將$(1)-(2)\times 2\Rightarrow 9y-7z+18=0$
- 取一組解令$y=-2, z=0$可解出

  $x=1$，因此可得所求。(如課本表示)