國立台灣師大附中高一下補充教材 Ch2-5 正弦定理與餘弦定理

重點一 二邊角面積公式及正弦定理

1. 二邊角面積公式：

 令 ΔABC 之面積以 $a\Delta ABC$ 或 Δ 表示，$\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，

 則 $a\Delta ABC=$ ______________________________

 $(\because \Delta=\frac{1}{2}\times$ 底 $\times$ 高 $=\frac{1}{2}\cdot a\cdot(b\sin C))$

2. 正弦定理：

 設 ΔABC 的外接圓半徑記為 R，$\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，

 則 ______________________

 （由 $a\Delta ABC=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$ 以 $\frac{2}{abc}$ 乘之可得）

例題演練

例題 1. 在 ΔABC 中，若 a,b,c，分別表 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的對邊長，依下列各條件求 ΔABC 的面積。

（1）$b=5$，$c=6$，$\angle A=60^{\circ}$ （2）$a=7$，$b=10$，$\angle C=45^{\circ}$

例題 2. 在半徑為 4 之一圓上取三點 A，B，C 使 $\overset{\frown}{AB}$ 之度數：$\overset{\frown}{BC}$ 之度數：$\overset{\frown}{CA}$ 之度數為 $3:4:5$，則 ΔABC 之面積為 ________。

例題 3. 設 a, b, c, 為 ΔABC 之三邊長，且 $a+b-2b=0$，$3a+4b-5c=0$，求 $\sin A:\sin B:\sin C=$ ________。

例題 4. ΔABC 中，$\angle B=55^{o}$，$\angle C=65^{o}$，$a=10$，則 ΔABC 的外接圓面積為 ______。

例題 5. 設圓內接四邊形 ABCD 中 $\angle CAD=30^{o}$，$\angle ACB=45^{o}$，$\overline{CD}=2$，求 $\overline{AB}=$ ______。

課後練習

1. ΔABC 之外接圓半徑為 4，若 $\overparen{AB}$ 度數：$\overparen{BC}$ 度數：$\overparen{CA}$ 度數為 $1:1:4$，則 ΔABC 之面積為 ________。

24. ΔABC 之三邊長為 a, b, c，外接圓半徑為 R，若 a, b, c 均小於 $\sqrt{3}R$，則 ΔABC 必為
(A)銳角三角形 (B)鈍角三角形 (C)直角三角形 (D)無法判斷

25. 若方程式 $8x^3-60x^2+142x-105=0$ 的三根分別為 α, β, γ，現以此三根為邊長構成一三角形，試求所形成三角形面積。

21. ΔABC 中，各邊 $\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$ 的高分別為 h_a, h_b, h_c，若 $h_a = 20$，$h_b = 15$，$h_c = 12$，則三邊長 $(a, b, c) =$ ________ 。

22. 設 ΔABC 三邊 $\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$ 上的中線長分別為 $5, 6, 7$，則 ΔABC 的面積為 ______ 。

23. ΔABC 中，若 $\overline{AB} = 4$，$\overline{AC} = 5$，$\overline{BC} = 6$，D, E 為 $\overline{BC}$ 之三等分點，若 $\angle DAE = \theta$，則 $\cos\theta =$ ______

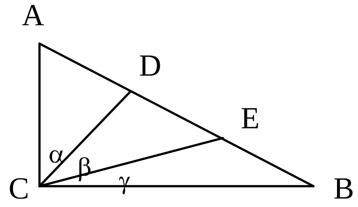
2. 三角形之三內角比為 $A : B : C = 1 : 2 : 3$，則 $a : b : c =$ ________ 。

3. 於 ΔABC 中，$\overline{AB} = 5\overline{AC}$，$P \in \overline{BC}$ 但異於 B, C 點，設 R, r 分別表 ΔABP 與 ΔACP 之外接圓半徑，試求 $\dfrac{r}{R}$ 之值。

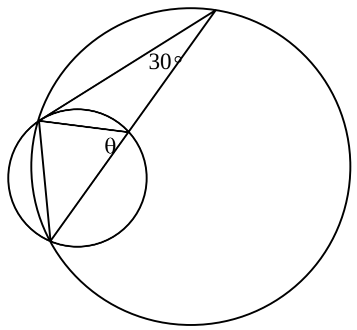
4. 設圓內接四邊形 ABCD 中，$\overline{AB} = 30$，$\angle CAD = \angle CBD = 45^\circ$，$\overline{AC}$ 交 $\overline{BD}$ 於 O 且 $\angle AOB = 75^\circ$，則 $\overline{CD} =$ ______ 。

5. 設圓內接四邊形 ABCD，$\overline{AB} = \overline{AD} = 5$，$\angle C = 90^\circ$，$\angle D = 105^\circ$，則
(1) $\overline{AC} =$ ________ 。(2) $\overline{BD} =$ ________ 。(3) 四邊形 ABCD 面積為 ________ 。

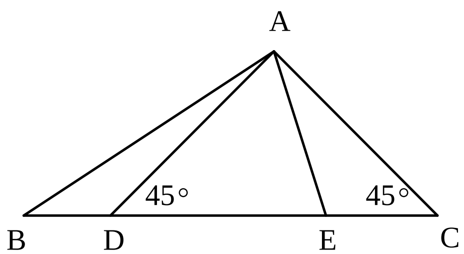
6. 如右圖，ΔABC 中，$\angle C=90^\circ$，且 $\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EB}$，已知 $\angle ACD=\alpha$，$\angle DCE=\beta$，$\angle ECB=\gamma$，則 $\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\beta}=$ ____



7. 如右圖所示，已知大圓的半徑是小圓半徑的兩倍，則 $\theta=$ ______



8. 如右圖，D, E 點在 ΔABC 的 $\overline{BC}$ 邊上，如果 $\angle ACB=\angle ADC=45^\circ$，試問 ΔABC，ΔABD 與 ΔABE 的外接圓的半徑 r_1, r_2 與 r_3 的大小關係為何？



課後練習

18. 甲，乙，丙三鄉，兩兩相距 4 公里，6 公里，8 公里，今欲設一個到三鄉距離相等的公園，此距離為 ______ 公里。

19. 梯形 ABCD 中，若 $\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$ 且 $\overline{AB}=13$，$\overline{BC}=25$，$\overline{CD}=15$，$\overline{AD}=11$，則梯形面積 $=$ ______ 。

20. ΔABC 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=3$，$\angle A=60^\circ$，求：
(1) Δ 的面積 $=$ ______ 。 (2) $\overline{BC}=$ ______ 。 (3) Δ 的外接圓半徑 $=$ ______ 。
(4) 分角線 $\overline{AD}=$ ______ 。(5) 中線 $\overline{AM}=$ ______ 。

例題 14. ΔABC 中，已知 $\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=7$，$\overline{AB}=8$，則最長邊上之中線長為____。

例題 15. ΔABC 之內切圓半徑為 r，切 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 於 D, E, F，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，

$s=\dfrac{a+b+c}{2}$

(1) 求證 $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sqrt{(s-b)(s-c)}}{s(s-a)}$。

(2) 若 a, b, c 成等差，則 $\tan\dfrac{A}{2}\cdot\tan\dfrac{C}{2}=$____。

(3) $\dfrac{a\Delta DEF}{a\Delta ABC}=$______。

重點二 餘弦定理及投影定理

1. 餘弦定理：

   ΔABC 中，$\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，

   則 $\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$

   並由餘弦定理可得 $\begin{cases} \angle A=90^\circ \Leftrightarrow a^2=b^2+c^2 \\ \angle A>90^\circ \Leftrightarrow a^2>b^2+c^2 \\ \angle A<90^\circ \Leftrightarrow a^2<b^2+c^2 \end{cases}$（廣義之畢式定理）

2. 投影定理：$\begin{cases} a=b\cos C+c\cos B \\ b=c\cos A+a\cos C \\ c=a\cos B+b\cos A \end{cases}$

例題演練

例題 6. ΔABC 中，若 $(b+c):(c+a):(a+b)=6:7:5$，求最大角的 cos 值＝______。

例題 7. ΔABC 中，D 在 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{AB}=7$，$\overline{BD}=3$，$\overline{AC}=3$，$\overline{CD}=2$，求 $\overline{AD}=$____。

例題 8. 四邊形 ABCD 內接於圓，已知 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CD}=2$，$\angle B=60^\circ$，求 $\overline{DA}=$ ________ 。

例題 9. 若 $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$，則 $\angle C=$ ____ 。

例題 10. ΔABC 中，(1)若 $c^4-2(a^2+b^2)c^2+a^4+a^2b^2+b^4=0$，則 $\angle C=$ ________ 。

(2)若 $(\sin A+\sin B+\sin C)(\sin A+\sin B-\sin C)=3\sin A\sin B$，則 $\angle C=$ ____ 。

(4)已知外接圓半徑 R：$\Delta=\dfrac{abc}{4R}$

證明：

2. 相關幾何定理：

(1)平行四邊形性質定理：平行四邊形各邊的平方和等於對角線的平方和。

(2)三角形的中線定理：ΔABC 中令 $\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 邊上的中線，則

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2)$

(3) 三角形的角平分線：利用面積可求得。

例題演練

例題 12. 設 ΔABC 中，其三邊長為 $5,6,7$，求：(1)此三角形之面積 (2)外接圓之半徑 (3)內切圓之半徑

例題 13. 設一三角形 ΔABC 的三高為 $6,4,3$，求：(1)最小角的餘弦 (2)三邊長

重點三 三角形邊角關係的應用

1. 面積公式：

(1)已知三邊：$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ （海龍公式）

證明：

(2)已知兩邊與夾角：$\Delta=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B$

(3)已知內切圓半徑 r：$\Delta=rs$

證明：

例題 11. ΔABC 中，a, b, c 表三邊長，其對角為 A， B，C，若 $a=\sqrt{5}+1$，$b=\sqrt{3}+1$，$c=5-\sqrt{5}$，則 $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=$ ________ 。

課後練習

9. ΔABC 中，若 $\tan A=\dfrac{1}{3}$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AC}=3\sqrt{10}$，則 $\overline{AB}=$ ________ 。

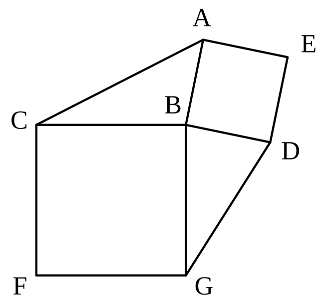
10. ΔABC 中，$\overline{AB}=5, \overline{BC}=6, \overline{CA}=7$，其內切圓切三邊 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 於 D, E, F, 求 $\overline{AD}=$ ____ 。

11. 凸四邊形 ABCD 內接於圓，已知 $\overline{AB}=\overline{BC}=3$，$\overline{CD}=5$，$\overline{DA}=8$，則 $\overline{BD}=$ ____ 。

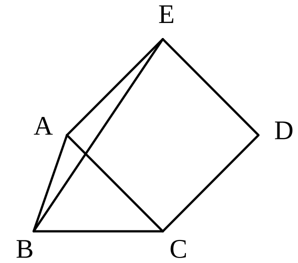
12. ΔABC 中， 若 $\log_3(a+b+c)+\log_3(a+b-c)=1+\log_3 a+\log_3 b$， 則 $\angle C=$____ 。

13. ΔABC 中， 若 $a\cos A=b\cos B$， 試證 ΔABC 為等腰三角形或直角三角形。

14. 設 ΔABC 中, $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CA}=7$, 如圖分別以 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 為邊向外作正方形 ABDE , BCFG ,
則 $\cos(\angle CAE)=$______ , $\overline{DG}=$______



15. 如右圖, 已知 ΔABC, $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=5$,
由 $\overline{AC}$ 邊作一個正方形 ACDE , 試求 $\overline{BE}$ 的長__________



16. ΔABC 中, 若 $\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{a}{b+c}=1$, 則 $\angle C=$____

17. 三角形 ABC 之三邊長為 x^2+x+1, x^2-1, $2x+1$, 則最大角角度為幾度？