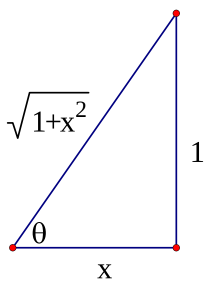
1.θ是一個銳角，設$\cot\theta = x$，試以x表示$\sin\theta$. 答：________.



答案：$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

解：如右圖所示，

我們可知$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

2.已知一方程式$3x^2+4x+k=0$的兩根分別為$\sin\theta, \cos\theta, k =$___.

答案：$\dfrac{7}{6}$

解：由根與係數：$\sin\theta+\cos\theta = -\dfrac{4}{3}$

將上式兩邊平方$\Rightarrow \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \dfrac{16}{9}$

$$1+2\sin\theta\cos\theta = \frac{16}{9} \therefore \sin\theta\cos\theta = \frac{7}{18}$$

再由根與係數：$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{k}{3} \Rightarrow \dfrac{7}{18} = \dfrac{k}{3} \therefore k = \dfrac{7}{6}$

3.若已經知道θ是銳角，且$\cos\theta+\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$，則求下列之值：

(1)$\cos\theta\sin\theta =$____ (2)$\tan\theta+\cot\theta =$___ (3)$\sin\theta-\cos\theta =$______

答案：(1)$\dfrac{1}{6}$ (2)6 (3)$\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

解：(1)將原式兩邊平方$\Rightarrow 1+2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{4}{3}$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{6}$$

(2)$\tan\theta+\cot\theta = \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta} = 6$

(3)$(\sin\theta-\cos\theta)^2 = (\sin\theta+\cos\theta)^2 - 4\sin\theta\cos\theta$

$$= 1-4\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$\therefore \sin\theta-\cos\theta = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

4.$\dfrac{\cos(-\theta)}{\sin(270^\circ-\theta)} - \dfrac{\tan(270^\circ+\theta)}{\cot(360^\circ-\theta)} =$___.

答案：-2

解：原式$= \dfrac{\cos\theta}{-\cos\theta} - \dfrac{-\cot\theta}{-\cot\theta} = -2$

5. $\cos 420^\circ \cdot \tan(-60^\circ) \cdot \sec 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cot 210^\circ \cdot \csc 450^\circ =$ __.

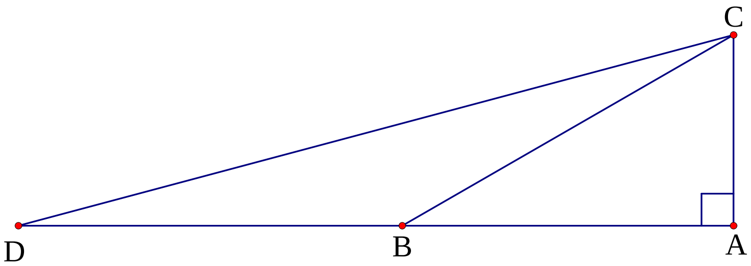
答案：0

解：原式 $=\cos 60^\circ \cdot (-\tan 60^\circ) \cdot \sec 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cot 30^\circ \cdot \csc 90^\circ$

$$=\frac{1}{2}\cdot(-\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1=0$$

6.如圖，已知 $\angle ABC = 30^\circ$, $\overline{BC} = \overline{BD}$ 且 $\overline{AC}$=3, 試問：

(1) $\overline{BD}$= __　(2) $\tan\angle ADC$= _______



答案：(1)6 (2) $2-\sqrt{3}$

解：(1) $\overline{BD} = \overline{BC} = \overline{AC}\csc 30^\circ = 3\cdot 2 = 6$

(2) $\overline{AB} = \overline{AC}\cot 30^\circ = 3\sqrt{3}$

$$\tan\angle ADC = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}+\overline{BD}} = \frac{3}{6+3\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

7.試證明 $\sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^2\theta + \tan^4\theta$.

解：左式 $=\sec^2\theta(\sec^2\theta - 1) = (1+\tan^2\theta)\tan^2\theta =$ 右式

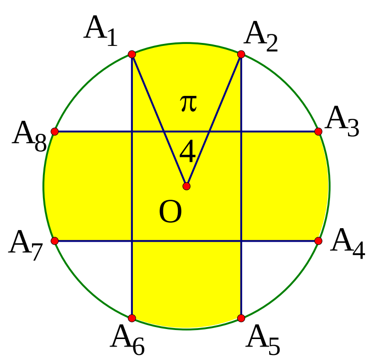
8.如圖，$A_1, A_2, \ldots, A_8$ 等八個點，依次將圓周八等分，

若圓半徑為 1,則線段 $\overline{A_1A_2}$ 長為__________, 斜線

部分面積為_________.

答案：$\sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-2$

解：(1) $\overset{\frown}{A_1A_2}$ 所對之圓心角



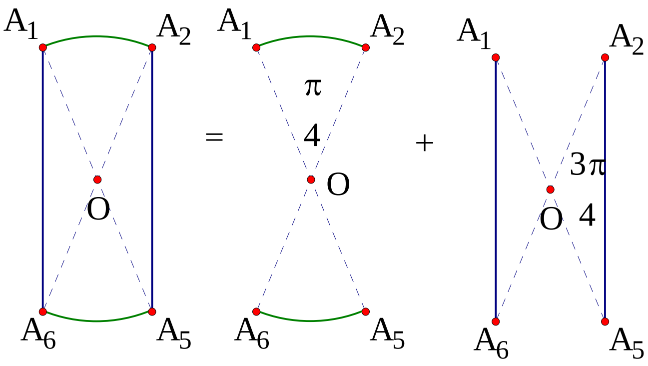
$$\angle A_1OA_2 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

由餘弦定理知

$$\overline{A_1A_2}^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{4} = 2-\sqrt{2}$$

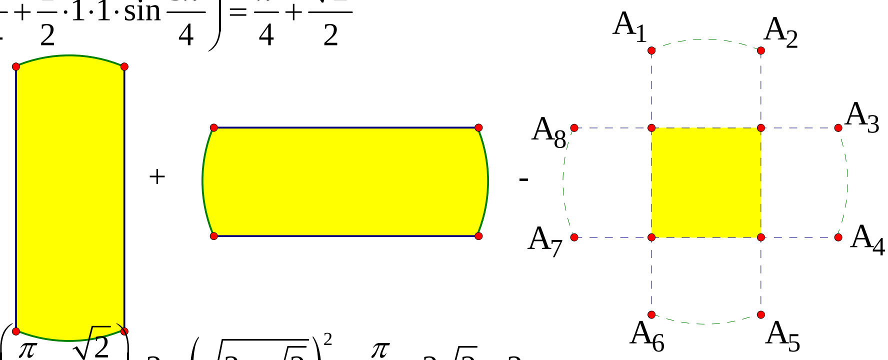
$$\therefore \overline{A_1A_2} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

(2)



$$=2\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

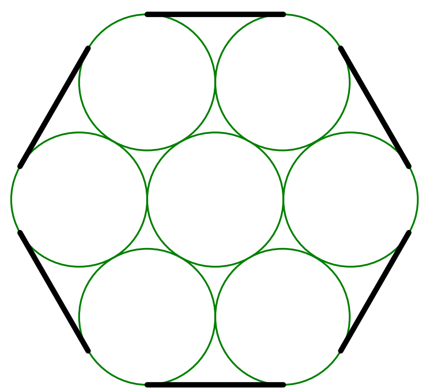
所求面積=



$$=\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 2-\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2=\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-2$$

9.包裝7根半徑皆為1的圓柱，其截面如圖所示。

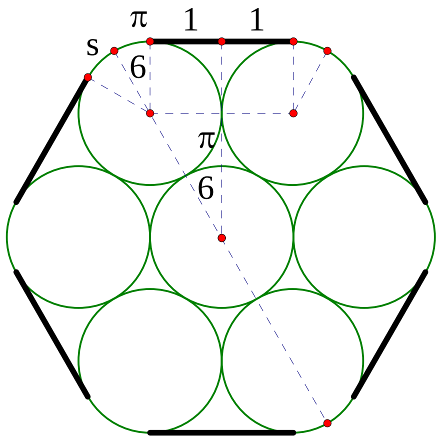
試問外為粗黑線條的長度為________.



答案：$2\pi+12$

解：$s=r\theta=1\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ 黑線條長度 $=6\left[\frac{\pi}{6}\cdot 2+2\right]=2\pi+12$



10.設 $a>0$, 令 $A(a)$ 表示 x 軸、y 軸、直線 $x=a$ 與函數 $y=2+\sin x$ 的圖形所圍成的面積。下列選項有哪些是正確的？

(1) $A(a+2\pi)=A(\pi)$ 恆成立

(2) $A(2\pi)=2A(\pi)$

(3) $A(4\pi)=2A(2\pi)$

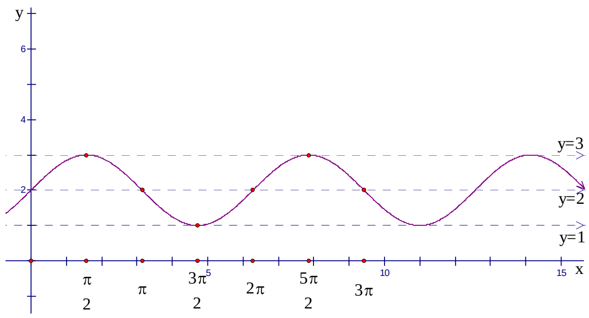
(4) $A(3\pi)-A(2\pi)>A(2\pi)-A(\pi)$

答案：(3)(4)

解：由圖：

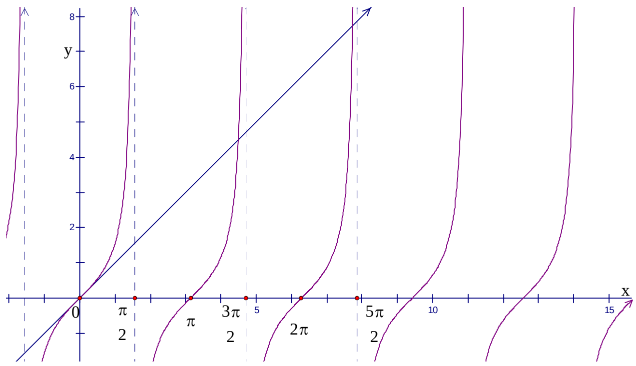
(1)× (2)× (3)O (4)O

∴選(3)(4)



11.將 $\tan x=x$ 的所有正實根有小到大排列，得一無窮數列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=$_________.

答案：由圖 $\Rightarrow$ 所求 $=\pi$



12.一木盒中裝有紅、白、藍三種顏色的球。已知藍球數至少是白球數的一半，至多是紅球數的 $\frac{1}{3}$, 且白球數與藍球數的和至少是 55, 問何中最少有多少個紅

球。

答案：57

解：設 x,y,z 分別表示紅、白、藍球數。依題設，得

$$\frac{y}{2}\le z\le\frac{1}{3}x,\ y+z\ge 55$$

$$\therefore y\le 2z, 3z\le x.$$

$$\therefore 55\le y+z\le 2z+z\le 3z \qquad (1)$$

因 z 是整數，故由(1)得 $z\ge 19$, 從而 $57\le 3z\le x$. ∴盒中最少有 57 個紅球。

13.有一水池池底有泉水不斷湧出，要將滿池的水抽乾，用 12 台水泵需 5 小時，用 10 台水泵需 7 小時，問要在 2 小時抽乾至少需幾台水泵(設每小時內，各水泵抽水量相同，湧出的水量也相同)。

答案：23

解：設每台水泵每小時的抽水量為 x, 開始抽水時池中的水量為 y, 泉水每小時

湧出的水量為z,2 小時抽乾滿池的水至少需p台水泵。依題意，得下列關係式：

$5\cdot 12x=y+5z$ (1)

$7\cdot 10x=y+7z$ (2)

$2px\ge y+2z$ (3)

將(1), (2)看作是y,z的二元一次方成，解得$y=35x, z=5x$. 再代入(3), 得 $2px\ge 35x+10x=45x.\therefore p\ge 22.5.$ 由於p是正整數，所以至少要 23 台水泵。

14.某縫紉社有甲、乙、丙、丁四個小組，甲組每天能縫製 8 件上衣或 10 條褲子；乙組每天縫製 9 件上衣或 12 條褲子；丙組每天縫製 7 件上衣或 11 條褲子；丁組每天縫製 6 件上衣或 7 條褲子。現在上衣和褲子要配套縫製(每套為 1 件上衣和 1 條褲子)，問 7 天中這個小組最多能縫製多少套衣服。

答案：125

解：甲、乙、丙、丁四個小組，甲組每天能縫製上衣與褲子的數量之比分別是 $\frac{4}{5},\frac{3}{4},\frac{7}{11},\frac{6}{7}.$

由於$\frac{6}{7}>\frac{4}{5}>\frac{3}{4}>\frac{7}{11},\therefore$丁組做上衣的效率最高，丙組做褲子的效率最高。於是，我們讓丁組 7 天都做上衣，丙組 7 天都做褲子。

再設甲組做上衣x天，做褲子$7-x$天；乙組做上衣y天，做褲子$7-y$天。則四個組 7 天共生產上衣$6\cdot 7+8x+9y$件，生產褲子 $11\cdot 7+10(7-x)+12(7-y)$條。依題意，有

$$42+8x+9y=77+70-10x+84-12y,$$

即

$$6x+7y=63, y=9-\frac{6}{7}x.$$

令

$$u=42+8x+9y=42+8x+9(9-\frac{6}{7}x)=123-\frac{2}{7}x$$

$\because 0\le x\le 7,\therefore$當$x=7$時(此時$y=3$),$u$取得最大值$u_{\max}=125.$

15.方程式$y=\sin x$的圖形與直線$y=\frac{1}{2}$有多少個交點？

(1)1 (2)2 (3)3 (4)4 (5)無窮多個

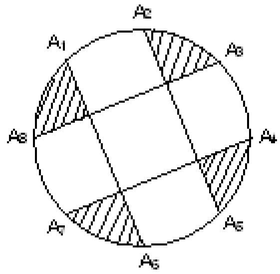
答案：5

16.π°角為

(A)小於一直角 (B)大於一直角 (C)等於二直角 (D)第一象限角 (E)象限角

答案：(A)(D)

10.如圖，$A_1,A_2,\cdots,A_8$依次為半徑 2 的圓周上 8 等分



點，作 $\overline{A_1A_4},\overline{A_8A_5},\overline{A_2A_7},\overline{A_3A_6}$ 等四個弦，則斜線部分

之面積為 ________

答案：$2\pi+8-8\sqrt{2}$

17.設 $a=x\sin x+y\sin y, b=x\sin y+y\sin x, 0\le x\le 90^\circ, 0\le y\le 90^\circ$，試比較 a,b 之大小。

答案：$a\ge b$

18. ΔABC 中，$a=\sqrt{7}, b=2, c=3$，則面積為：

(A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (B) $\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$ (C) $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ (D) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (E) $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

答案：(A)

19.下列何者是一個鈍角三角形的三邊長？

(A)2, 3, 4 (B)3, 4, 5 (C)4, 5, 6 (D)3, 5, 7 (E)3, 5, 8

答案：(A)(D)

20.若 a,b,c 分別表 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的對邊長，則下列何者恰可決定一個三角形？

(A) $a=9, b=10, \angle A=60^\circ$ (B) $a=7, b=4, c=3$ (C) $\angle A,\angle B,\angle C=3:5:10$

(D) $a=10, \angle B=60^\circ$，三角形面積為 30 (E) $a=\sqrt{3}, b=\sqrt{3}, \angle A=89^\circ$

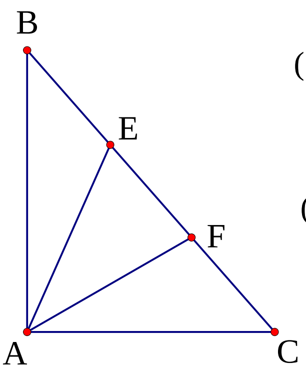
答案：(D)(E)

21.在 ΔABC 中，$a=2, c=1$，若 ΔABC 的面積最大，試求此時 b 邊的長________

答案：$\sqrt{5}$

22.在直角三角形 ABC 中，E,F 是斜邊 $\overline{BC}$ 的三等分點，求證：$\overline{AE}^2+\overline{AF}^2=\dfrac{5}{9}\overline{BC}^2$.

證明：在 ΔABE 及 ΔACF 中分別應用餘弦定理，得



$$\overline{AE}^2=\overline{AB}^2+\overline{BE}^2-2\overline{AB}\,\overline{BE}\cos B \qquad (1)$$

及

$$\overline{AF}^2=\overline{AC}^2+\overline{CF}^2-2\overline{AC}\,\overline{CF}\cos C \qquad (2)$$

由題設 $\overline{BE}=\overline{CF}=\dfrac{1}{3}\overline{BC}$，於是 $(1)+(2)$ 得

$$\overline{AE}^2+\overline{AF}^2=(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2)+\frac{2}{9}\overline{BC}^2-\frac{2}{3}\overline{BC}(\overline{AB}\cos B+\overline{AC}\cos C)$$

$$=\overline{BC}^2+\frac{2}{9}\overline{BC}^2-\frac{2}{3}\overline{BC}\left(\overline{AB}\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}+\overline{AC}\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}\right)$$

$$=\overline{BC}^2+\frac{2}{9}\overline{BC}^2-\frac{2}{3}\overline{BC}^2$$

$$=\frac{11}{9}\overline{BC}^2-\frac{6}{9}\overline{BC}^2=\frac{5}{9}\overline{BC}^2.$$

23.平面上有定線段$\overline{AB}=\sqrt{3}$, 動點M,N滿足$\overline{AM}=\overline{MN}=\overline{NB}=1$. 記$\Delta AMB$及$\Delta MNB$的面積分別為$S,T$, 問在什麼條件下，$S^2+T^2$取最大值。

解： $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{6}$

解：如圖，在ΔAMB及ΔMNB中分別應用餘弦定理，得

$$\overline{MB}^2=1+3-2\sqrt{3}\cos A=4-2\sqrt{3}\cos A$$

及

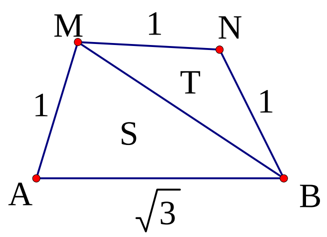
$$\overline{MB}^2=1+1-2\cos N=2-2\cos N$$

兩式相減，得$\cos N=\sqrt{3}\cos A-1$. 由三角形的面積公式。有

$$S^2+T^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sin N\right)^2$$

$$=\frac{3}{4}(1-\cos^2 A)+\frac{1}{4}(1-\cos^2 N)$$

$$=1-\frac{3}{4}\cos^2 A-\frac{1}{4}(\sqrt{3}\cos A-1)^2$$



$$=-\frac{3}{2}\left(\cos A-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\frac{7}{8}. \tag{1}$$

若$A=90^\circ\Rightarrow\overline{MB}=2$, 若$A>90^\circ\Rightarrow\overline{MB}>2$. 兩者都有$\overline{MB}>\overline{MN}+\overline{NB}$, 但這不可能。$\therefore 0<\cos A<1$.

於是，由(1)式，當$\cos A=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}(<1)$時，$S^2+T^2$取最大值$\frac{7}{8}$.

24.在邊長為3, 4, 5的直角三角形中，求直角的內角平分線的長度。

答案：$\frac{12\sqrt{2}}{7}$

解：在ΔABC中，設$a=5,b=4,c=3$, 則

$$t_a^2=bc\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]=4\cdot 3\cdot\left[1-\left(\frac{5}{7}\right)^2\right]=\frac{12\cdot 24}{7^2}$$

$$\therefore t_a=\frac{12\sqrt{2}}{7}$$

25.(P. Varignon 定理)四邊形各邊的中點依次連結成平行四邊形，其面積是原四邊形面積的一半。

證明：$S_{PQRS}=S_{ABCD}-\Delta PBQ-\Delta QCR-\Delta RDS-\Delta SAR$

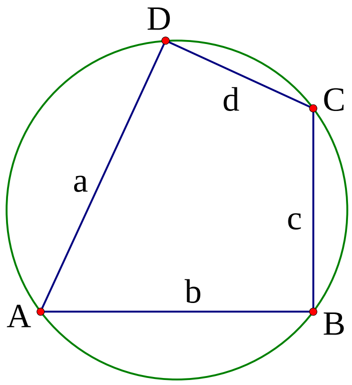
$$=S_{ABCD}-\frac{1}{4}\Delta ABC-\frac{1}{4}\Delta BCD-\frac{1}{4}\Delta ADC-\frac{1}{4}\Delta ABD$$

$$=S_{ABCD}-\frac{1}{4}S_{ABCD}-\frac{1}{4}S_{ABCD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

26.(Brahmagupta 公式). 設圓內接四邊形的各邊長度為 a,b,c,d，令

$s=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$，則對其面積 K 有：

$$K^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$



證明：如圖，設圓內接四邊形 $ABCD$，則有

$A+C=180^\circ, B+D=180^\circ.$

$\therefore \cos A=-\cos C, \sin A=\sin C$

$\because \overline{BD}^2=a^2+b^2-2ab\cos A=c^2+d^2-2cd\cos C$

$\therefore 2(ab+cd)\cos A=a^2+b^2-c^2-d^2(1)$

$\because K=\frac{1}{2}ab\sin A+\frac{1}{2}cd\sin C=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin A,$

$\therefore 2(ab+cd)\sin A=4K(2)$

將(1)和(2)式的平方和相加，得

$$4(ab+cd)^2=(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+16K^2$$

$$16K^2=(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$$

$$=(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)$$

$$=[(a+b)^2-(c-d)^2][(c+d)^2-(a-b)^2]$$

$$=(a+b-c+d)(a+b+c-d)(c+d-a+b)(c+d+a-b)$$

$$=(2s-2c)(2s-2d)(2s-2a)(2s-2b)$$

$$=16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d),$$

即有

$$K^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$