

根與係數關係

若一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 有兩根 α, β

$$\text{則} \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases}$$

不論 a, b, c 為多少 ($a \neq 0$)，只要利用配方法，對所有一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 都能求解，更因此建立了公式解。接著再看看方程式的根與方程式的係數存在怎樣的關係。

先看看一個例子： $\because (x-2)(x-3) = x^2 - 3x - 2x + 6 = x^2 - 5x + 6$

解方程式得 $x^2 - 5x + 6 = 0$

可得 $(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x-2 = 0 \vee x-3 = 0$

$\Rightarrow x = 2 \vee 3$

一般的情形該如何表達呢？

若方程式 $ax^2 + bx + c = 0 \cdots \textcircled{1}$ 有兩根 α, β

表示經過適當的運算可以表成因式分解形式：

$(x-\alpha)(x-\beta) = 0 \cdots \textcircled{2} \Rightarrow$ 有兩根 α, β

①與②式同義

\therefore 由②得： $(x-\alpha)(x-\beta) = 0$

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

由①得： $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

經比較係數知：

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases}$$

國二數學—根與係數的關係、根的定義補充 & 其他

姓名：

1. 設 α, β 為 $x^2 + 8x + 5 = 0$ 之兩根，則 $\alpha + \beta =$ 【 】， $\alpha\beta =$ 【 】。

2. 若 a, b 為方程式 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 的兩根，則：

(1) $a + b =$ 【 】。

(2) $ab =$ 【 】。

(3) $a^2 + b^2 =$ 【 】。

3. 文晁利用配方法解出方程式 $x^2 - 2x - 5 = 0$ 的兩根為 a, b 則 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$ 【 】。

4. x 的一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的兩根為 $1, -1$ 則 $\frac{b+c}{a}$ 之值為 【 】。

5. 設 n 是一元二次方程式 $1 + 2x - x^2 = 0$ 的一根，試求 $n^2 - 2n + 1 =$ 【 】。

6. 若 $x = 2 \pm \sqrt{3}$ 為方程式 $2x^2 + mx + n = 0$ 之兩根，則 $mn =$ 【 】。

7. 方程式 $x^2 - px + q = 0$ 兩根之差是 2 ，則 $p^2 - 4q$ 之值是 【 】。

8. 若 $x^2 - 7x + 1 = 0$ ，求：

(1) $x + \frac{1}{x} = ?$

(2) $x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$

9. 若 $x^2 + x - 5 = 0$ ，求 $(x^2 + x + 2)^2 + 5(2x^2 + 2x + 3) - 4$ 之值。